



HELMUT SCHMIDT
UNIVERSITÄT

Universität der Bundeswehr Hamburg

Jens Gengenbach

**REM-Berechnung und Messung des
Emissionsgrades mikrostrukturierter
Oberflächen**

**REM-Berechnung und Messung des
Emissionsgrades mikrostrukturierter Oberflächen**

Von der Fakultät Maschinenbau
der Helmut-Schmidt-Universität,
Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Jens Gengenbach

aus Norden

Hamburg, Juli 2007

1. Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Stephan Kabelac
2. Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Franz Joos

Tag der Promotion: 02. Juli 2007

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermodynamik der Helmut-Schmidt-Universität in Hamburg. Dem Leiter des Institutes, Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Kabelac möchte ich für die Anregung des Themas und die Möglichkeit zur freien Arbeit danken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Joos, dem Leiter des Instituts für Energietechnik an der Helmut-Schmidt-Universität Hamburg, danke ich für das freundlicherweise übernommene Koferat. Des Weiteren danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. J. P. Wulfsberg für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Vor allem gilt mein Dank allen ehemaligen Kollegen des Instituts für Thermodynamik, die durch gemeinsame konstruktive Diskussionen und ihre stets aufmunternde Art wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank geht dabei an meinen Kollegen Jan-Florian Kuhnke ohne dessen Unterstützung in schwierigen Phasen, diese Arbeit nicht so gut gelungen wäre.

Auch den Studenten, die durch die Anfertigung von Studien- und Diplomarbeiten zum Fortschritt dieser Arbeit beigetragen haben, danke ich.

Für die Unterstützung und Aufmunterung durch meine Familie und meine Freunde bedanke ich mich von Herzen.

Hamburg, Juli 2007

Jens Gengenbach

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Indizes	II
1 Einleitung	1
2 Theoretischer Hintergrund	3
2.1 Strahlung des Schwarzen Körpers	3
2.1.1 Eigenschaften des Schwarzen Körpers	3
2.1.2 Das Plancksche Strahlungsgesetz	4
2.1.3 Das Wiensche Verschiebungsgesetz	5
2.1.4 Das Lambertsche Kosinusetz	5
2.1.5 Hohlraumstrahlung	6
2.2 Strahlungseigenschaften nichtschwarzer Oberflächen	7
2.2.1 Der Emissionsgrad	8
2.2.2 Der Absorptionsgrad	10
2.2.3 Das Kirchhoffsche Gesetz	13
2.2.4 Der Reflektionsgrad	14
2.2.5 Zusammenhang zwischen den optischen Eigenschaften	18
2.3 Grundlagen der elektromagnetischen Theorie	18
2.3.1 Die Maxwell'schen Gleichungen	19
2.3.2 Der Poyntingsche Satz	21
2.3.3 Die Fresnel'schen Gleichungen	23
3 Die Berechnung des Emissionsgrades	27
3.1 Der Berechnungsansatz	27
3.2 Das REM-Verfahren	31
3.3 Das Aufstellen der Wellendifferentialgleichung	34
3.4 Die Randbedingungen	36
3.5 Die Fundamentallösungen	37
3.6 Herleitung der Randintegralgleichung	40
3.7 Diskretisierung des Randes	45
3.8 Integration der Randintegralgleichungen	46
3.9 Die Definition der einfallenden Strahlung	48
3.10 Berechnung der Randwerte	53
3.11 Berechnung der Feldwerte	54
3.12 Berechnung der einfallenden und gestreuten Energien	55
3.13 Die senkrecht polarisierte Welle	59
3.14 Das programmierte Verfahren	63

4	Die Messung von Strahlungseigenschaften	67
4.1	Mögliche Messverfahren	67
4.2	Die Versuchsanlage	69
4.2.1	Das Probensystem	72
4.2.2	Der Schwarzkörperstrahler	76
4.2.3	Grundlagen zur FTIR-Spektrometrie	77
4.2.4	Das verwendete FTIR-Spektrometer	81
4.2.5	Automatisierung der Anlage	82
4.3	Das Messverfahren	84
4.3.1	Die Messwertaufnahme	84
4.3.2	Die Kalibrierung	86
4.3.3	Die Bestimmung der Oberflächentemperatur	92
4.3.4	Betrachtungen zur Messunsicherheit	95
4.3.5	Die Messwertauswertung	98
5	Ergebnisse und Diskussion	101
5.1	Berechnungsergebnisse	101
5.1.1	Validierung	101
5.1.2	Mikrostrukturierte Oberflächen	109
5.2	Messergebnisse	117
6	Zusammenfassung und Ausblick	131
Anhang		
A	Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung	135
B	Darstellung von Schwingungen in der komplexen Ebene	137
C	Datensammlung zu komplexen Brechzahlen	139
D	Die Hankel Funktion	140
	Literaturverzeichnis	143

Formelzeichen und Indizes

Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
<i>A</i>	m^2	Fläche
<i>B</i>	Vs m^{-2}	magnetische Induktion
<i>Bb</i>	Hz	Bandbreite
<i>D</i>	As m^{-2}	dielektrische Verschiebung
<i>E</i>	V m^{-1}	elektrische Feldstärke
<i>F</i>	-	Fensterfunktion
<i>G</i>	-	Greensche Funktion
<i>H</i>	A m^{-1}	magnetische Feldstärke
<i>I</i>	-	Intensität
<i>J</i>	A m^{-2}	elektrische Stromdichte
J	-	Untermatrize 1 bei der E-Feldberechnung
K	-	Untermatrize 2 bei der E-Feldberechnung
<i>L</i>	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$	Strahlungsdichte
<i>M</i>	W m^{-2}	spezifische Ausstrahlung
<i>N</i>	-	Anzahl der Randelemente
P	-	Untermatrize 1 bei der H-Feldberechnung
Q	-	Untermatrize 2 bei der H-Feldberechnung
S	-	Poynting Vektor
<i>T</i>	K	Temperatur
<i>V</i>	m^3	Volumen
<i>W</i>	J	Energie
<i>a</i>	-	Randfaktor
<i>b</i>	m	Breite der Normalverteilung
<i>c</i>	ms^{-1}	Fortpflanzungsgeschwindigkeit
<i>d</i>	m	Durchmesser
<i>k</i>	-	Absorptionskonstante, Imaginärteil der komplexen Brechzahl
<i>k</i>	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$	Wärmedurchgangskoeffizient
<i>l</i>	m	Länge
<i>n</i>	-	Brechzahl, Realteil der komplexen Brechzahl
n	m	Oberflächennormalenvektor
<i>q</i>	W m^{-2}	Wärmestromdichte

r	m	Radius
r	m	Abstand Feldpunkt zu Ladepunkt
\mathbf{s}	m	Wellenrichtungsvektor
t	s	Zeit
u	Jm^{-3}	Dichte der umgewandelten Energie
w	Jm^{-3}	Energiedichte
x	-	Ortskoordinate
\mathbf{x}	-	Ortsvektor
y	-	Ortskoordinate
z	-	Ortskoordinate

Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
Γ	-	Rand
Δ	m	Randelementlänge
Λ	m	Periodenlänge
Υ	m	Rinnenbreite
Φ	J	Energie
Ψ	m	Rinnentiefe
Ω	sr	Raumwinkel
α	-	Absorptionsgrad
β	rad	Randwinkel
ε	-	Emissionsgrad
ε_r	-	relative Dielektrizitätskonstante
$\bar{\varepsilon}$	-	komplexe Dielektrizitätskonstante
ζ	-	Ortskoordinate des Ladepunktes
ϑ	$^\circ, \text{rad}$	Polarwinkel
κ	$\text{AV}^{-1}\text{m}^{-1}$	elektrische Leitfähigkeit
λ	m	Wellenlänge
μ_r	-	relative Permeabilität
ν	cm^{-1}	Wellenzahl
ξ	-	Ortskoordinate des Ladepunktes
ξ	-	Ortsvektor des Ladepunktes
ϖ	$^\circ$	Winkelauflösung
ρ	Asm^{-3}	Raumladungsdichte
ϱ	-	Reflektionsgrad
ς	m	Abstand

τ	-	Transmissionsgrad
ϕ	$^{\circ}, \text{rad}$	substituierter Winkel
φ	$^{\circ}, \text{rad}$	Azimutwinkel
χ	$^{\circ}, \text{rad}$	Brechungswinkel
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz

Indizes

Symbol	Bedeutung
'	gerichtete Größe
”	gerichtet-gerichtete Größe
\perp	senkrecht
\parallel	parallel
$>$	oberhalb
$<$	unterhalb
*	konjugiert
B	Blende
M	Messfläche
a	absorbiert
ber	berechnet
cu	Kupfer
e	einfallend
fak	Faktor
hs	Hohlraumstrahler
m	gemessen
n	Randelement n
o	Oberfläche
ost	oberhalb gestreut
p	Probe
r	reflektiert
s	bezogen auf den Schwarzen Körper
sp	Spiegel, Spalt
t	transmittiert
u	Umgebung
ust	unterhalb gestreut
x	x-Koordinatenanteil
λ	spektral
ges	gesamt

max maximal

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
AD	Analog-Digital
GPIB	General Purpose Interface Bus
FEM	Finite-Elementen-Methode
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FTIR	Fouriertransformation Infrarot
ISIT	Fraunhofer Institut für Siliziumtechnologie
PCI	Peripheral Component Interconnect
REM	Randelementenmethode
LU	Lower Upper

Physikalische Konstanten

Vakuumlichtgeschwindigkeit	c_0	$3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Boltzmann Konstante	k	$1.3806503 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Planksches Wirkungsquantum	h	$6.62606876 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Erste Planksche Strahlungskonstante	c_1	$3,741775 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2$
Zweite Planksche Strahlungskonstante	c_2	$14387,7 \text{ } \mu\text{m K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Wiensche Verschiebungsgesetzkonstante	c_3	$2897,7686 \text{ } \mu\text{m K}$
Dielektrizitätskonstante des Vakuums	ε_0	$8.859 \cdot 10^{-12} \text{ A s / V m}$
Permeabilitätskonstante des Vakuums	μ_0	$1,26 \cdot 10^{-6} \text{ V s / A m}$

Mathematische Symbole und Operationen

Symbol	Operation
i	Komplexe Einheit
$\text{Re}(A)$	Realteil von A
$\text{Im}(A)$	Imaginärteil von A
$\delta(x)$	Dirac-Funktion von x
\mathbf{a}	Vektor A
\mathbf{A}	Feld A
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Vektorprodukt der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}

1 Einleitung

In der heutigen Zeit wird für viele technische Anwendungen ein fundiertes Wissen über die Strahlungseigenschaften von technischen Oberflächen benötigt. Der Strahlungsenergietransport ist sehr wichtig bei Raumfahrtsystemen, Hochtemperaturwärmeübertragern und jeglicher Nutzung von Solarenergie.

Der Einfachheit halber wird der Strahlungsenergietransport in den Ingenieurwissenschaften häufig mit hemisphärischen und über alle Wellenlängen integrierten Strahlungseigenschaften der Oberflächen beschrieben. Für eine detaillierte Beschreibung des Strahlungsenergietransports werden jedoch die spektralen und gerichteten Eigenschaftswerte benötigt. Die Entropie eines Strahlungsstroms ist z.B. abhängig von der spektralen Richtungsverteilung der Strahlung.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es daher gerichtete, spektrale Emissionsgrade von technischen Oberflächen zu messen. Hierbei konzentrieren sich die Bemühungen auf die Messung von mikrostrukturierten Oberflächen. Die spektrale Richtungskontrolle der thermischen Strahlung ist eine der wichtigsten Möglichkeiten die Effizienz verschiedener thermischer Anlagen zu verbessern. Das Konzept periodisch, mikrostrukturierter Oberflächen stellt dabei eine der aussichtsreichsten Möglichkeiten zur Kontrolle der gerichteten, spektralen Strahlungseigenschaften dar. Neue Entwicklungen in der Mikrofertigungstechnik erlauben die Herstellung von periodischen Mikrostrukturen in der Größenordnung der Wellenlängen von thermischer Strahlung. Eine Beeinflussung der Emission durch Interferenzeffekte zwischen diesen Strukturen und den elektromagnetischen Wellen wird erwartet.

Es ist jedoch sehr aufwendig und kostspielig für Parameterstudien unterschiedlich mikrostrukturierte Oberflächen herzustellen. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist daher die Berechnung der Emissionsgrade verschieden mikrostrukturierter Oberflächen, um Parameterstudien durchführen zu können. Mittels dieser Parameterstudien sollen die wesentlichen Beeinflussungseffekte herausgearbeitet werden.

Zur Vorbereitung der Bearbeitung der gesetzten Ziele werden in Kapitel 2 die benötigten theoretischen Grundlagen zur Wärmestrahlung dargelegt. Beginnend mit der Beschreibung des Schwarzen Körpers, über die Strahlung realer Körper und abschließend mit den Grundlagen der elektromagnetischen Theorie erfolgt ein Überblick über die wichtigsten theoretischen Grundlagen.

Aufbauend auf diesen Grundlagen wird in Kapitel 3 die Berechnung des Emissionsgrades für verschieden strukturierte Oberflächen beschrieben. Die Berechnung basiert auf der Bestimmung der Energie eines Streufeldes eines auf eine beliebig geformte Ober-

fläche auftreffenden elektromagnetischen Feldes. Zur Beschreibung der Berechnung werden der Berechnungsansatz, das verwendete Verfahren, die notwendigen Elemente zur Lösung des Streufeldproblems und die Energieberechnung vorgestellt und erläutert.

Die zur Messung des spektralen, gerichteten Emissionsgrades betriebene Versuchsanlage wird in Kapitel 4 näher betrachtet. Zuerst werden Erfordernisse und mögliche Messverfahren beschrieben, um die realisierte Versuchsanlage einordnen zu können. Es folgen umfassende Beschreibungen ihrer Komponenten, des automatisierten Messverfahrens und der Messwertauswertung.

Das 5. Kapitel fasst die erzielten Ergebnisse zusammen. Es werden die Berechnungsergebnisse und Messergebnisse getrennt von einander dargestellt. Die Darstellung der Berechnungsergebnisse enthält als einen wesentlichen Teil dieser Arbeit, die Ergebnisse zu den Validierungsrechnungen des realisierten Berechnungsverfahrens. Des Weiteren werden Berechnungsergebnisse für mikrostrukturierte Oberflächen dargestellt. Der Abschnitt zu den Berechnungsergebnissen schließt mit einer Betrachtung der durchgeführten Parameterstudien. Die Darstellungen der Messergebnisse für mikrostrukturierte Oberflächen untermauern und ergänzen abschließend die Erkenntnisse aus den berechneten Parameterstudien.

Eine Übersicht der wichtigsten Erkenntnisse und einige Ideen zur Weiterentwicklung des Berechnungsverfahrens und der Messanlage beschließen in Kapitel 6 diese Arbeit.

2 Theoretischer Hintergrund

Die Grundprinzipien der Wärmeübertragung durch Strahlung unterscheiden sich deutlich von denen der Wärmeleitung und der konvektiven Wärmeübertragung. Die Wärmeübertragung durch Strahlung ist nicht an Materie gebunden. Der Wärmestrom steht in keinem linearen Verhältnis zu treibenden Temperaturgradienten oder Temperaturdifferenzen, für ihn sind Unterschiede der vierten Potenz der thermodynamischen Temperatur der am Wärmeaustausch beteiligten Körper massgeblich. Des Weiteren ist die räumliche und spektrale Verteilung der Strahlung zu berücksichtigen.

Die Grundlagen zur Betrachtung und Berechnung der Wärmestrahlung werden in diesem Kapitel dargestellt. Beginnend mit der Beschreibung des Schwarzen Körpers, über die Strahlung realer Körper und abschließend mit den Grundlagen der elektromagnetischen Theorie wird ein Überblick über den theoretischen Hintergrund der Wärmestrahlung gegeben.

2.1 Strahlung des Schwarzen Körpers

Bei der Betrachtung von Strahlungseigenschaften real emittierender Körper wird ein Referenzstandard zum Vergleich der Eigenschaftswerte benötigt. Hierzu wird ein Körper definiert, der keine einfallende Strahlung reflektiert und die gesamte Strahlungsenergie im Inneren absorbiert. Diesen Körper bezeichnet man als Schwarzen Körper. Diese Definition beruht auf den Betrachtungen zu den Eigenschaften der Hohlraumstrahlung wie sie im Abschnitt 2.1.5 beschrieben werden.

2.1.1 Eigenschaften des Schwarzen Körpers

Bestimmte grundlegende Eigenschaften des idealen schwarzen Körpers machen ihn zu einem geeigneten Referenzstandard. Diese Eigenschaften sind nach Siegel, Howell und Lohrengel [38]:

1. Ein schwarzer Körper ist der bestmögliche Emittent und Absorber für Strahlungsenergie in jede Richtung und für jede Wellenlänge.
2. Die Strahlung ist unabhängig vom Material des schwarzen Körpers.
3. Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz ermöglicht die Berechnung der Strahldichte und der hemisphärischen, spezifischen Ausstrahlung eines schwarzen Körpers.

4. Die Beschreibung der Strahldichte eines schwarzen Körpers in Abhängigkeit von Temperatur und Wellenlänge erfolgt durch das Plancksche Strahlungsgesetz.
5. Ein Zusammenhang zwischen gerichteter Ausstrahlung und Ausstrahlung eines schwarzen Körpers wird durch das Lambertsche Kosinusetz beschrieben.
6. Das Wiensche Verschiebungsgesetz ermöglicht die Berechnung der Wellenlänge, bei der das Maximum der spektralen Strahldichteverteilung der Strahlung eines Schwarzen Körpers auftritt.

2.1.2 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Die Spektralverteilung der Strahldichte eines Schwarzen Körpers ist Grundlage für viele Berechnungen auf dem Gebiet der Wärmestrahlung. Die spektrale Verteilung und die Temperaturabhängigkeit der Strahldichte wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz wie folgt beschrieben.

$$L'_{\lambda s}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\pi \lambda^5 [\exp(c_2/\lambda T) - 1]} \quad (2.1)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind

$$c_1 = 2\pi h c_0^2 = 3,741775 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2$$

$$c_2 = h \frac{c_0}{k} = 14387,7 \text{ } \mu\text{mK},$$

wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, h die Planck-Konstante und k die Boltzmann-Konstante ist. Die Spektralverteilung ist abhängig von der thermodynamischen Temperatur T des Schwarzen Körpers. Die Abhängigkeit der spektralen Strahldichte von Wellenlänge und Temperatur wird in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

Die Abhängigkeit der dargestellten spektralen, spezifischen Ausstrahlung $M_{\lambda s}$ von der gerichteten spektralen Strahldichte L'_{λ} ergibt sich gemäß Baehr und Stephan [2] zu

$$M_{\lambda s}(\lambda, T) = \pi L'_{\lambda s}(\lambda, T) . \quad (2.2)$$

Sie beruht auf der Definition der gerichteten spektralen Strahldichte L'_{λ} als die pro Zeiteinheit in einem Wellenlängenbereich $d\lambda$ von einem auf die senkrechte Fläche zur ϑ, φ – Richtung projizierten Flächenelement in den Raumwinkel emittierten Strahlungsenergie. Eine ausführliche Ableitung des Zusammenhangs 2.2 wird von Siegel, Howell und Lohregel [38] dargestellt.

Die Integration über alle Wellenlängen ergibt die hemisphärische Gesamtausstrahlung für die nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt

$$M_s(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda s}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 . \quad (2.3)$$

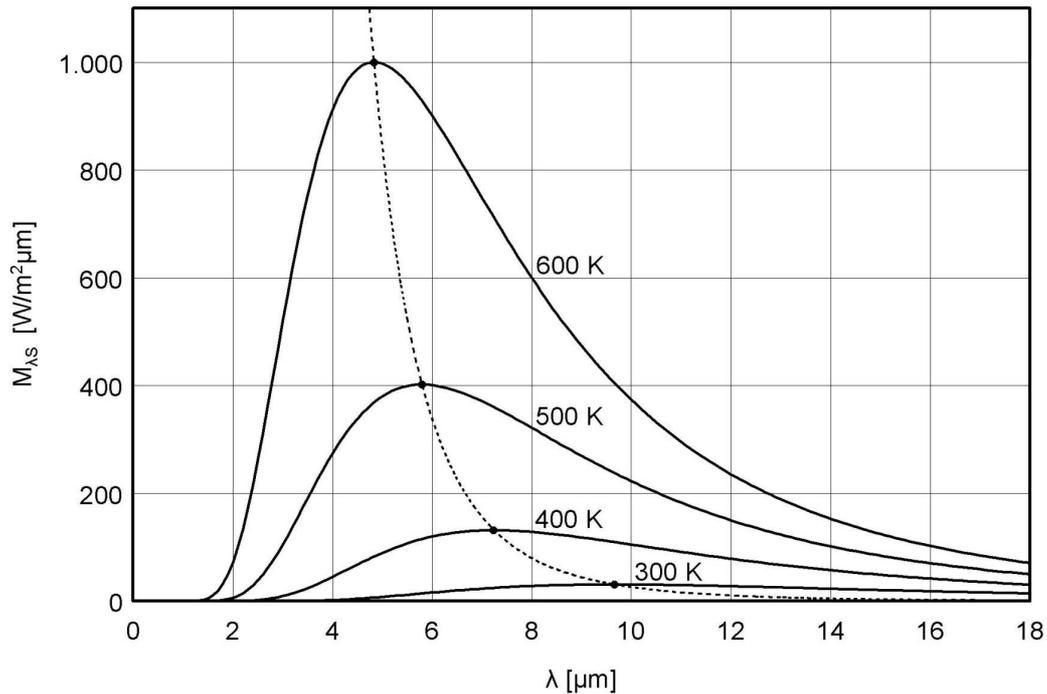


Abb. 2.1 Die spektrale, flächenspezifische Ausstrahlung eines Schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die gestrichelte Linie kennzeichnet die Position des jeweiligen Maximums gemäß des Wienschen Verschiebungsgesetzes.

2.1.3 Das Wiensche Verschiebungsgesetz

Das Emissionsspektrum des Schwarzen Körpers weist für eine gegebene Temperatur ein Maximum der spezifischen Ausstrahlung auf. Die Ermittlung der Wellenlänge, bei der das Maximum auftritt, erfolgt durch Differenzieren der Planckschen Gleichung. Wird die Ableitung gleich Null gesetzt, ergibt sich die transzendente Gleichung

$$\left(1 - \frac{c_2}{5\lambda T}\right) \exp(c_2/\lambda T) = 1. \quad (2.4)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt

$$\lambda_{max} T = c_3. \quad (2.5)$$

Mit der Konstanten des Wienschen Verschiebungsgesetzes $c_3 = 2897,7686 \mu\text{mK}$. Die Formel zeigt, dass sich mit steigender Temperatur das Maximum der spezifischen Ausstrahlung zu kürzeren Wellenlängen verschiebt.

2.1.4 Das Lambertsche Kosinusgesetz

Die Definition der gerichteten spektralen Strahldichte L'_λ erfolgt über die in Abschnitt 2.1.2 vorgestellte Flächenprojektion. Die spektrale spezifische Ausstrahlung ist dagegen definiert als Energie, die in eine Richtung von einem nicht projiziertem Flächenelement

emittiert wird. Basierend auf diesen Definitionen lässt sich die pro Zeiteinheit von einer schwarzen Oberfläche dA in einem Wellenlängenbereich $d\lambda$ in jede Richtung emittierte Energie $d^3\Phi'_{\lambda_s}$ auf zwei Arten beschreiben

$$d^3\Phi'_{\lambda_s}(\lambda, \vartheta, \varphi) = M'_{\lambda_s}(\lambda, \vartheta, \varphi) dA d\Omega d\lambda = L'_{\lambda_s}(\lambda) \cos \vartheta dA d\Omega d\lambda . \quad (2.6)$$

Das Flächenelement dA bei der Beschreibung der emittierten Energie mit der spektralen spezifischen Ausstrahlung M'_{λ} wird bei Nutzung der gerichteten spektralen Strahlendichte L'_{λ} durch das projizierte Flächenelement $\cos \vartheta dA$ ersetzt. Hieraus ergibt sich der Zusammenhang

$$M'_{\lambda_s}(\lambda, \vartheta, \varphi) = L'_{\lambda_s}(\lambda) \cos \vartheta = M'_{\lambda_s}(\lambda, \vartheta) , \quad (2.7)$$

der als das Lambertsche Kosinusetz bezeichnet wird. Eine Oberfläche für die dieses Gesetz gültig ist nennt man diffuse oder Lambertsche Oberfläche. Bei diesen Oberflächen ist die spektrale Strahlendichte richtungsunabhängig.

2.1.5 Hohlraumstrahlung

Die als Bezugsnormale für Strahlungsmessungen genutzte Schwarzkörperstrahlung gibt es in unserer Umwelt nicht. Die Beschreibung der Eigenschaften dieser Strahlung beruhen auf der so genannten Hohlraumstrahlung. Sie ist die Strahlung, die sich in einem adiabaten und nicht transparentem Hohlraum nach Abbildung 2.2.a im thermodynamischen Gleichgewichtszustand einstellt. Die Wärmeleitung und die konvektive Wärmeübertragung sind auf Grund der adiabaten Wände in dem Hohlraum nicht vorhanden. Die konstant auf T_o temperierten Wände senden jedoch Wärmestrahlung aus. Im thermodynamischen Gleichgewicht müssen die emittierte und absorbierte Strahlendichte der Wärmestrahlung für alle Wellenlängen und Winkel gleich sein. Die Hohlraumstrahlung ist somit homogen, isotrop, nicht polarisiert und unabhängig vom

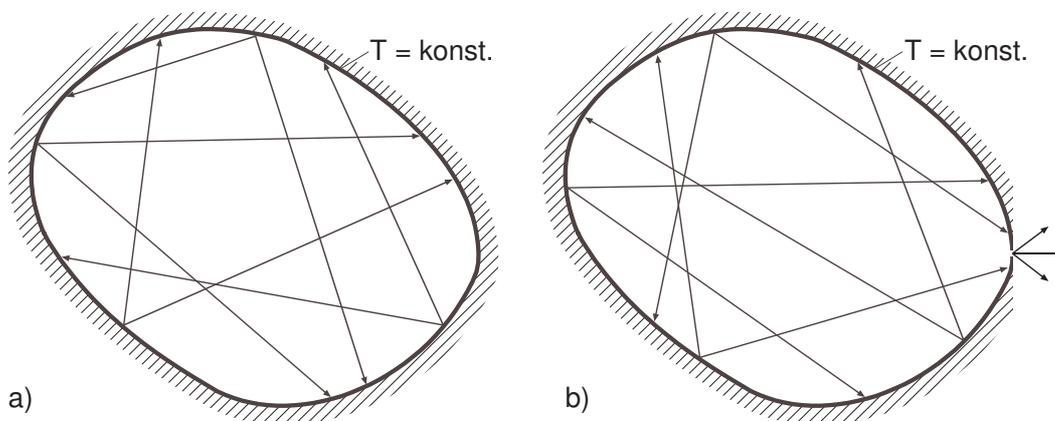


Abb. 2.2 a) Schwarze Strahlung in einem Hohlraum mit adiabaten isothermen Wänden
b) Schwarze Strahlung wird aus einer kleinen Öffnung emittiert

Volumen des Hohlraums. Die Hohlraumstrahlung definiert damit alle Eigenschaften der Strahlung eines Schwarzen Körpers.

Ein Hohlraum mit einer kleinen Öffnung, wie in Abbildung 2.2.b dargestellt, ermöglicht die Emission von annähernd Schwarzer Strahlung. Durch die Öffnung einfallende Strahlung wird im Hohlraum immer wieder absorbiert und reflektiert, bis fast die gesamte Energie des einfallenden Strahls absorbiert wurde. Die Schwarzkörpereigenschaft einfallende Strahlung vollständig zu absorbieren ist damit für die Öffnung in hohem Maße erfüllt. Dem Gesetz von Kirchhoff aus Kapitel 2.2.3 entsprechend emittiert sie dann Schwarzkörper-Strahlung.

2.2 Strahlungseigenschaften nichtschwarzer Oberflächen

Die Annahme des Schwarzen Körpers ist für reale Körper grundsätzlich nicht zutreffend. Die Eigenschaften realer Körper mit nichtschwarzen Oberflächen unterscheiden sich von denen des Schwarzen Körpers. Der Schwarze Körper dient bei den Betrachtungen dieser realen Körper als Referenzstandard. Die realen Eigenschaften werden durch Vergleiche mit den Eigenschaften eines Schwarzen Körpers beschrieben.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen realer Strahlung und Schwarzkörperstrahlung ist die Richtungsabhängigkeit der realen Strahlung. Die Schwarzkörperstrahlung hängt nur von der Wellenlänge und der Temperatur ab. Die reale Strahlung ist zusätzlich vom Strahlungswinkel, der durch den Polarwinkel ϑ und den Azimutwinkel φ beschrieben wird, abhängig. In Abbildung 2.3 wird die Strahlungsgeometrie am Beispiel der gerichteten spektralen Strahlungsdichte

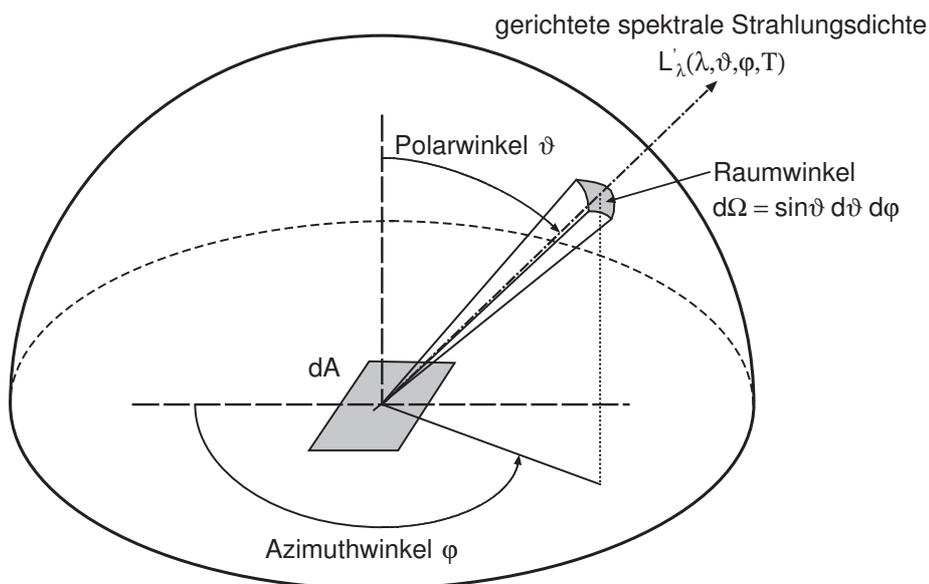


Abb. 2.3 Strahlungsgeometrie

teten spektralen Strahlungsdichte verdeutlicht. Des Weiteren weist reale Strahlung eine von der Schwarzkörperstrahlung abweichende Spektralverteilung auf. Zur Beschreibung realer Strahlung werden Informationen über die spektralen und richtungsabhängigen Eigenschaften benötigt.

Die Abhängigkeiten von Wellenlänge und Richtung führen gemäß Baehr und Stephan [2] zu vier Arten strahlungsphysikalischer Größen:

- Gerichtete spektrale Größen, die beide Abhängigkeiten darstellen können und aus denen sich die folgenden Größen durch Integration berechnen lassen.
(Index: ϑ und λ)
- Gerichtete Gesamtgrößen, die die Strahlung aller Wellenlängen zusammenfassen und nur von den Richtungen des Halbraums abhängen. (Index: ϑ)
- Hemisphärische spektrale Größen, bei denen die Richtungsabhängigkeit durch eine Integration der Strahlung über den Halbraum entfällt und nur die Wellenlängenabhängigkeit bestehen bleibt. (Index: λ)
- Hemisphärische Gesamtgrößen, die die Strahlung aller Wellenlängen und Richtungen zusammenfasst. (ohne Index)

Je mehr Faktoren zusammengefasst werden, um so mehr Informationen zur Spektralverteilung oder der Richtungsabhängigkeit der Strahlung gehen verloren. Die informationsreichsten Größen sind die gerichteten spektralen Größen, aus denen sich alle anderen Größen berechnen lassen.

2.2.1 Der Emissionsgrad

Der Emissionsgrad ε ist eine Materialeigenschaft des Strahlung aussendenden Körpers. Die dimensionslose Verhältnisgröße ist definiert als die reale spezifische Ausstrahlung bezogen auf die spezifische Ausstrahlung eines Schwarzen Körpers bei derselben Temperatur T . Somit ergeben sich für den Emissionsgrad Werte kleiner 1. Es werden vier Arten des Emissionsgrades unterschieden.

Die allgemeinste Art des Emissionsgrades ist der gerichtete spektrale Emissionsgrad ε'_λ , da er alle Informationen über die Abhängigkeiten von Wellenlänge, Richtung und Oberflächentemperatur enthält. Der gerichtete spektrale Emissionsgrad ε'_λ wird als Verhältnis der spektralen gerichteten Ausstrahlung M'_λ einer realen Oberfläche zu der eines Schwarzen Körpers M'_{λ_s} bei gleicher Temperatur definiert. Daraus folgt die Definitionsgleichung

$$\varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) = \frac{M'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)}{M'_{\lambda_s}(\lambda, \vartheta, T_o)} = \frac{L'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)}{L'_{\lambda_s}(\lambda, T_o)}. \quad (2.8)$$

Aus dem gerichteten spektralen Emissionsgrad ε'_λ werden die weiteren Emissionsgrade abgeleitet. Der hemisphärische spektrale Emissionsgrad ε_λ ergibt sich aus einer Integration des gerichteten spektralen Emissionsgrads ε'_λ über alle Raumwinkel. Er ist definiert als Verhältnis der hemisphärischen spektralen spezifischen Ausstrahlungen M_λ eines realen Körpers und eines Schwarzen Körpers $M_{\lambda s}$. Die hemisphärische spektrale spezifische Ausstrahlung M_λ wird durch Integration der Spektralenergie über alle Raumwinkel ermittelt.

$$M_\lambda(\lambda, T_o) = \int_{\Delta} L'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) \cos \vartheta \, d\Omega \quad (2.9)$$

Im Allgemeinen kann $L'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)$ aufgrund der Winkelabhängigkeit nicht ausgeklammert werden, aber mit der Definition des gerichteten spektralen Emissionsgrads ε'_λ (2.8) folgt

$$M_\lambda(\lambda, T_o) = L'_{\lambda s}(\lambda, T_o) \int_{\Delta} \varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) \cos \vartheta \, d\Omega. \quad (2.10)$$

Die hemisphärische spektrale spezifische Ausstrahlung für einen Schwarzen Körper folgt aus der Gleichung

$$M_{\lambda s}(\lambda, T_o) = \pi L'_{\lambda s}(\lambda, T_o). \quad (2.11)$$

Das Verhältnis der beschriebenen hemisphärischen spektralen spezifischen Ausstrahlungen ergibt folgende Definitionsgleichung des hemisphärischen spektralen Emissionsgrades

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T_o) = \frac{M_\lambda(\lambda, T_o)}{M_{\lambda s}(\lambda, T_o)} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) \cos \vartheta \, d\Omega. \quad (2.12)$$

Eine weitere Art des Emissionsgrades ergibt sich aus der Mittelung über alle Wellenlängen. Der gerichtete Gesamtemissionsgrad ε' ist das Verhältnis der gerichteten spezifischen Ausstrahlung eines realen Körpers M' zu der eines Schwarzen Körpers M'_s bei der gleichen Temperatur. Die gerichtete spezifische Ausstrahlung wird durch Integration der gerichteten spektralen spezifischen Ausstrahlung über alle Wellenlängen berechnet. Für den realen Körper gilt

$$M'(\vartheta, \varphi, T_o) = \int_0^\infty M'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) \, d\lambda, \quad (2.13)$$

und für den Schwarzen Körper findet man

$$M'_s(\vartheta, T_o) = \int_0^\infty M'_{\lambda s}(\lambda, \vartheta, T_o) \, d\lambda = \frac{\sigma T_o^4 \cos \vartheta}{\pi}. \quad (2.14)$$

Der Quotient aus diesen beiden gerichteten spezifischen Ausstrahlungen ist der gerichtete Gesamtemissionsgrad ε' . Er lässt sich ebenfalls unter Verwendung des gerichteten spektralen Emissionsgrades ε'_λ darstellen.

$$\begin{aligned}\varepsilon'(\vartheta, \varphi, T_o) &= \frac{M'(\vartheta, \varphi, T_o)}{M'_s(\vartheta, T_o)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) M'_{\lambda_s}(\lambda, \vartheta, T_o) d\lambda}{\sigma T_o^4 \cos \vartheta / \pi} \\ &= \frac{\pi \int_0^\infty \varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda_s}(\lambda, T_o) d\lambda}{\sigma T_o^4} .\end{aligned}\quad (2.15)$$

Die am häufigsten verwendete Art des Emissionsgrades ist der hemisphärische Gesamtemissionsgrad ε . Bei der Bestimmung dieses Emissionsgrades wird über alle Wellenlängen und Abstrahlungsrichtungen gemittelt. Er ist definiert als Verhältnis der hemisphärischen spezifischen Ausstrahlung eines realen Körpers M zu der eines Schwarzen Körpers M_s

$$\begin{aligned}\varepsilon(T_o) &= \frac{M(T_o)}{M_s(T_o)} = \frac{\int_0^\infty \int_{\Omega} M'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) d\lambda d\Omega}{\sigma T_o^4} \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_{\Omega} \varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda_s}(\lambda, T_o) d\lambda \cos \vartheta d\Omega}{\sigma T_o^4} .\end{aligned}\quad (2.16)$$

Zur Berechnung der Wärmeübertragung durch Strahlung zwischen zwei Oberflächen wird in der Regel der hemisphärische Gesamtemissionsgrad ε in Kombination mit einem Sichtfaktor genutzt. Dadurch erlangt der hemisphärische Gesamtemissionsgrad ε eine große praktische Bedeutung. Allerdings macht der geringe Informationsgehalt den Einsatz zur genauen Energie- und Entropiebilanzierung einer Oberfläche unmöglich. Ein häufig bei der Berechnung der Wärmeübertragung durch Strahlung verwendeter idealisierter Körper zwischen dem Schwarzen Körper und einem realen Körper ist der graue Strahler. Der graue Strahler hat einen über alle Wellenlängen konstanten hemisphärischen spektralen Emissionsgrad ε_λ und strahlt diffus. In Abbildung 2.4 ist die hemisphärische spektrale spezifische Ausstrahlung M_λ für einen schwarzen Strahler, einen grauen Strahler sowie beispielhaft für einen realen Strahler über der Wellenlänge bei jeweils derselben Temperatur dargestellt.

2.2.2 Der Absorptionsgrad

Der Absorptionsgrad α ist ein Maß dafür, wie viel Strahlungsenergie ein realer Körper im Vergleich zum Schwarzen Körper absorbieren kann. Der durch den Körper absorbierte Bruchteil eines einfallenden Strahlungsflusses wird als Absorptionsgrad α definiert.

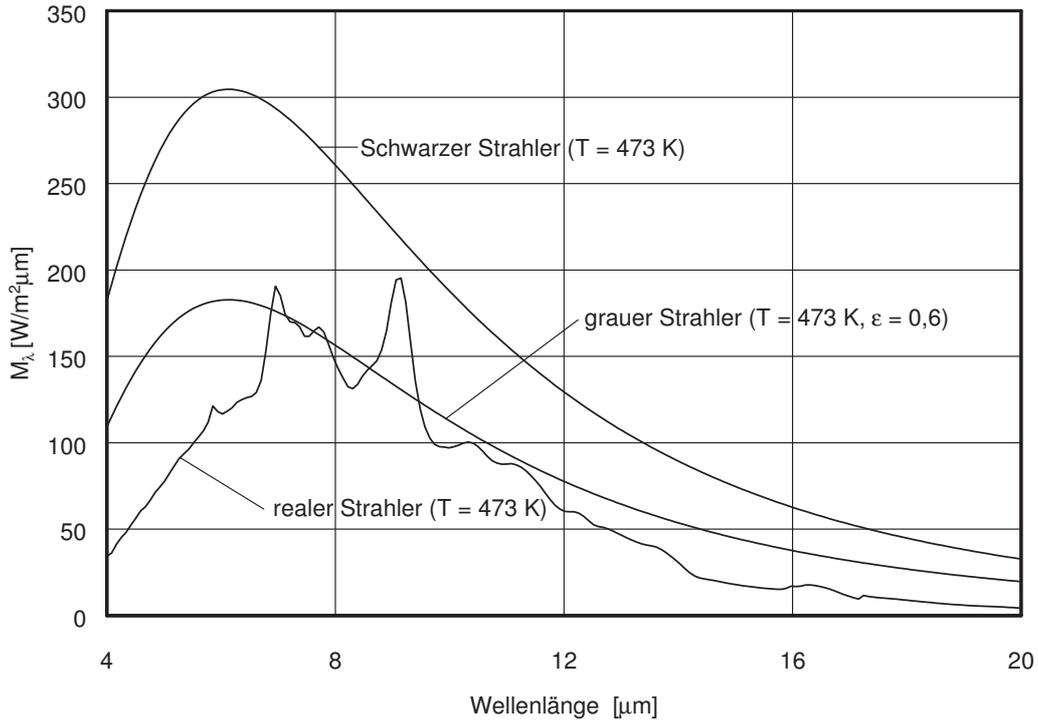


Abb. 2.4 Hemisphärische spektrale spezifische Ausstrahlung eines schwarzen, eines grauen und eines realen Strahlers bei derselben Temperatur

Hieraus ergibt sich für den Absorptionsgrad ein Wertebereich von 0 bis 1. In Erweiterung zum Emissionsgrad müssen bei der Betrachtung des Absorptionsgrades auch die spektralen und gerichteten Eigenschaften der einfallenden Strahlung berücksichtigt werden. In Analogie zur Betrachtung des Emissionsgrades werden vier Arten des Absorptionsgrades definiert.

Der gerichtete spektrale Absorptionsgrad α'_λ enthält alle Informationen über die Abhängigkeiten von Wellenlänge, Richtung und Oberflächentemperatur. Die Energie $d^3\Phi'_{\lambda,e}$, die pro Zeiteinheit aus einer durch ϑ und φ beschriebenen Richtung im Wellenlängenbereich $d\lambda$ auf die Fläche dA einfällt, wird durch die folgende Gleichung beschrieben.

$$d^3\Phi'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) = L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega dA d\lambda \quad (2.17)$$

Der Betrag des absorbierten Anteils der einfallenden Energie wird als $d^3\Phi'_{\lambda,a}$ gekennzeichnet. Durch Bildung des Verhältnisses zwischen $d^3\Phi'_{\lambda,a}$ und $d^3\Phi'_{\lambda,e}$ ergibt sich der gerichtete spektrale Absorptionsgrad zu

$$\alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) = \frac{d^3\Phi'_{\lambda,a}(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)}{d^3\Phi'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi)} = \frac{d^3\Phi'_{\lambda,a}(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)}{L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega dA d\lambda} \quad (2.18)$$

Der gerichtete Gesamtabsorptionsgrad α' wird definiert als das Verhältnis aus der Energie, die aus einer festgelegten Richtung im gesamten Wellenlängenbereich pro Zeiteinheit absorbiert werden kann, und der Energie, die aus der festgelegten Richtung pro

Zeiteinheit einfällt. Die Bestimmung der absorbierten, gerichteten Gesamtenergie $d^2\Phi'_a$ erfolgt durch Integration von Gleichung 2.18 über alle Wellenlängen.

$$d^2\Phi'_a(\vartheta, \varphi, T_o) = \cos \vartheta \, d\Omega \, dA \int_0^\infty \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda \quad (2.19)$$

Die Integration der einfallenden spektralen Energie $d^3\Phi'_{\lambda,e}$ (2.17) über alle Wellenlängen ergibt die einfallende, gerichtete Gesamtenergie pro Raum- und Flächenelement

$$d^2\Phi'_e(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta \, d\Omega \, dA \int_0^\infty L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda \quad . \quad (2.20)$$

Das Verhältnis dieser beiden Gesamtenergien stellt den gerichteten Gesamtabsorptionsgrad α' in der folgenden Form dar

$$\alpha'(\vartheta, \varphi, T_o) = \frac{d^2\Phi'_a(\vartheta, \varphi, T_o)}{d^2\Phi'_e(\vartheta, \varphi)} = \frac{\int_0^\infty \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda}{\int_0^\infty L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda} \quad . \quad (2.21)$$

Der absorbierte Anteil der pro Zeiteinheit aus allen Richtungen einfallenden spektralen Energie $d^2\Phi_{\lambda,e}$ charakterisiert den hemisphärischen spektralen Absorptionsgrad α_λ . Die pro Zeiteinheit aus allen Richtungen einfallende Energie $d^2\Phi_{\lambda,e}$ wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$d^2\Phi_{\lambda,e}(\lambda) = d\lambda \, dA \int_{\triangle} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \quad . \quad (2.22)$$

Zur Definition des hemisphärischen spektralen Absorptionsgrads α_λ wird des Weiteren die aus allen Richtungen absorbierte Energie $d^2\Phi_{\lambda,a}$ benötigt. Durch Integration von Gleichung 2.18 über die Halbkugel ist diese Energie berechenbar

$$d^2\Phi_{\lambda,a}(\lambda, T_o) = d\lambda \, dA \int_{\triangle} \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \quad . \quad (2.23)$$

Das Verhältnis der beiden zuvor genannten Energien ist der hemisphärische spektrale Absorptionsgrad

$$\alpha_\lambda(\lambda, T_o) = \frac{d^2\Phi_{\lambda,a}(\lambda, T_o)}{d^2\Phi_{\lambda,e}(\lambda)} = \frac{\int_{\triangle} \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega}{\int_{\triangle} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega} \quad . \quad (2.24)$$

Zur Ermittlung des hemisphärischen Gesamtabsorptionsgrads α werden die absorbierte und einfallende Gesamtenergie aus allen Richtungen pro Zeiteinheit benötigt. Die pro

Zeiteinheit absorbierte hemisphärische Gesamtenergie $d\Phi_a$ wird beschrieben durch die Integration von 2.18 über alle Wellenlängen und alle Richtungen einer Halbkugel

$$d\Phi_a(T_o) = dA \int_0^\infty \int_{\triangle} \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \, d\lambda . \quad (2.25)$$

Die pro Zeiteinheit einfallende hemisphärische Gesamtenergie $d\Phi_e$ wird durch die Integration von 2.17 über alle Wellenlängen und alle Richtungen der Hemisphäre bestimmt

$$d\Phi_e = dA \int_0^\infty \int_{\triangle} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \, d\lambda . \quad (2.26)$$

Die Bildung des Quotientens aus diesen beiden Gesamtenergien ergibt den hemisphärischen Gesamtabsorptionsgrad

$$\alpha(T_o) = \frac{d\Phi_a(T_o)}{d\Phi_e} = \frac{\int_0^\infty \int_{\triangle} \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \, d\lambda}{\int_0^\infty \int_{\triangle} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \, d\lambda} . \quad (2.27)$$

2.2.3 Das Kirchhoffsche Gesetz

Das Kirchhoffsche Gesetz beschreibt eine Beziehung zwischen den Materialeigenschaften Emissionsgrad und Absorptionsgrad. Diese Beziehung unterliegt unterschiedlichen Bedingungen für spektrale, gerichtete, hemisphärische oder gesamte Größen. Die allgemein gültige Formulierung des Kirchhoffschen Gesetzes gilt für gerichtete, spektrale Größen. Die Beziehung ergibt sich aus der Betrachtung der Energiebilanz für einen Körper mit beliebig gerichtetem spektralem Absorptionsgrad α'_λ , der sich in einem evakuierten adiabaten Hohlraum befindet. Die Körper- und die Hohlraumoberfläche haben dieselbe Temperatur T_o . Im Hohlraum stellt sich gemäß Abschnitt 2.1.5 eine isotrope Strahldichte ein. Damit die Isotropie der Strahlung innerhalb des Hohlraums erhalten bleibt muss der Körper im thermodynamischen Gleichgewicht in jedes Raumwinkel-element und in jedem Wellenlängenintervall in gleichem Maße Energie ausstrahlen, wie er dort von der Hohlraumstrahlung absorbiert. Durch Gleichsetzen der absorbierten und emittierten Energie folgt das Kirchhoffsche Gesetz $\varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) = \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)$. Für die weiteren Erscheinungsformen der Emissions- und Absorptionsgrade gilt diese Identität nur unter bestimmten Bedingungen. Die möglichen Abhängigkeiten von Emissionsgrad und Absorptionsgrad und die notwendigen Bedingungen sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Tabelle 2.1 Abhängigkeiten zwischen Emissions- und Absorptionsgrad nach Kirchhoff

Größenart	Abhängigkeit	Bedingung
gerichtet, spektral	$\varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o) = \alpha'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)$	keine
gerichtet, gesamt	$\varepsilon'(\vartheta, \varphi, T_o) = \alpha'(\vartheta, \varphi, T_o)$	Spektrale Unabhängigkeit des Emissions- und Absorptionsgrades oder die Proportionalität der Spektralverteilung der einfallenden Strahlung mit der eines schwarzen Körpers
hemisphärisch, spektral	$\varepsilon_\lambda(\lambda, T_o) = \alpha_\lambda(\lambda, T_o)$	Richtungsunabhängigkeit des Emissions- und Absorptionsgrades oder die einfallende Strahlung muss vom Winkel unabhängig sein
hemisphärisch, gesamt	$\varepsilon(T_o) = \alpha(T_o)$	Unabhängigkeit des Emissions- und Absorptionsgrades von Wellenlänge und Winkel oder die einfallende Strahlung muss richtungsunabhängig sein und eine Schwarzkörper proportionale Spektralverteilung haben oder die einfallende Strahlung ist richtungsunabhängig und der Emissions- und Absorptionsgrad ist spektral ungebunden oder die einfallende Strahlung ist spektral ungebunden und der Emissions- und Absorptionsgrad ist richtungsunabhängig

2.2.4 Der Reflektionsgrad

Die Beschreibung des Reflektionsgrades ist aufwendiger als die Beschreibung des Emissions- und Absorptionsgrades, da beim Reflektionsgrad ϱ nicht nur die Richtung der einfallenden Strahlung sondern auch die Richtung der reflektierten Strahlung zu berücksichtigen ist. Die komplexere Geometrie des Reflektionsvorgangs ist in Abbildung 2.5 exemplarisch für die Strahlungsgrößen zur Berechnung des gerichtet-gerichteten spektralen Reflektionsgrads ϱ''_λ dargestellt.

Der gerichtet-gerichtete spektrale Reflektionsgrad ϱ''_λ enthält alle Informationen über

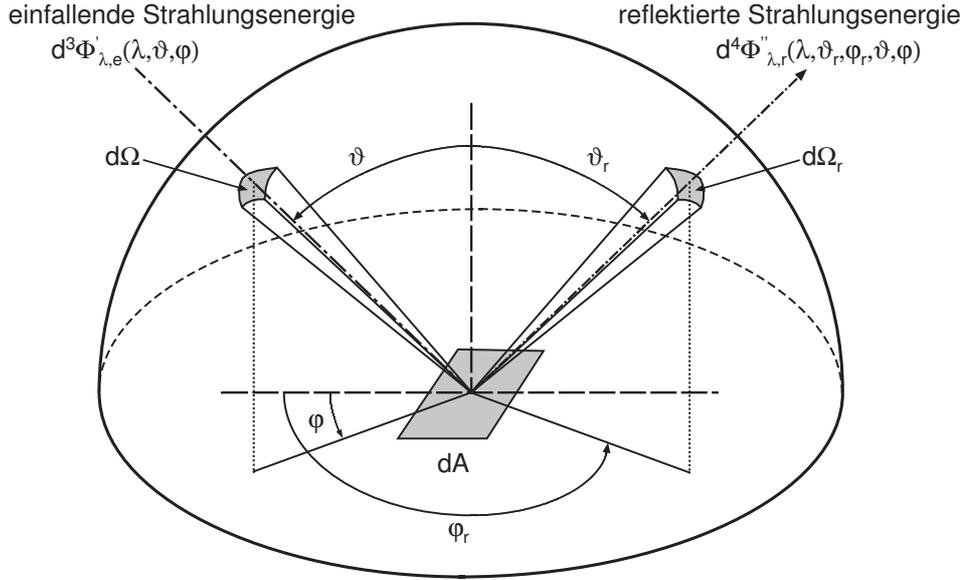


Abb. 2.5 Reflektionsgeometrie

die Reflektionseigenschaften einer Oberfläche. Dieser Reflektionsgrad ist definiert durch den Quotienten aus der reflektierten Strahldichte und der innerhalb des Raumwinkels $d\Omega$ auftreffenden Energie.

$$\varrho''_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) = \frac{L''_{\lambda,r}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi)}{L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega} \quad (2.28)$$

Die Beschreibung der hemisphärischen Reflektionsanteile basiert auf der pro Zeiteinheit in den gesamten Halbraum reflektierten Energie

$$d^3\Phi'_{\lambda,r}(\lambda, \vartheta, \varphi) = dA d\lambda \int_{\underline{\Delta}} L''_{\lambda,r}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta_r d\Omega_r. \quad (2.29)$$

Diese Energie lässt sich durch Anwendung von 2.28 in Abhängigkeit vom gerichtet-gerichteten spektralen Reflektionsgrad ϱ''_{λ} darstellen.

$$d^3\Phi'_{\lambda,r}(\lambda, \vartheta, \varphi) = L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega dA d\lambda \int_{\underline{\Delta}} \varrho''_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta_r d\Omega_r. \quad (2.30)$$

Die Definition des gerichteten-hemisphärischen spektralen Reflektionsgrads $\varrho'_{\lambda}(\lambda, \vartheta, \varphi)$ ergibt sich aus der Division der in alle Raumwinkel reflektierten Energie durch die aus einer Richtung einfallende Energie. Hieraus folgt die folgende Darstellung in Abhängigkeit vom gerichtet-gerichteten spektralen Reflektionsgrad ϱ''_{λ} .

$$\varrho'_{\lambda}(\lambda, \vartheta, \varphi) = \frac{d^3\Phi'_{\lambda,r}(\lambda, \vartheta, \varphi)}{d^3\Phi'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi)} = \int_{\underline{\Delta}} \varrho''_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta_r d\Omega_r \quad (2.31)$$

Zur Beschreibung der in eine Richtung reflektierten Energie, die aus der aus allen Richtungen einfallenden Energie resultiert, benötigt man die gerichtet reflektierte Strahldichte $L'_{\lambda,r}$. Diese Strahldichte in Reflektionsrichtung lässt sich durch Integration von 2.28 über alle Einfallsrichtungen berechnen.

$$L'_{\lambda,r}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r) = \int_{\triangle} \varrho''_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega \quad (2.32)$$

Zur Berechnung des hemisphärischen-gerichteten spektralen Reflektionsgrad $\varrho'_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r)$ wird die gerichtet reflektierte Strahldichte $L'_{\lambda,r}$ durch die integrierte, gemittelte, einfallende Strahldichte dividiert. Es ergibt sich der hemisphärische-gerichtete spektrale Reflektionsgrad $\varrho'_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r)$ in Abhängigkeit vom gerichtet-gerichteten spektralen Reflektionsgrad ϱ''_{λ} .

$$\varrho'_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r) = \frac{\int_{\triangle} \varrho''_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega}{(1/\pi) \int_{\triangle} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \, d\Omega} \quad (2.33)$$

Die vorhergehenden Definitionen des Reflektionsgrades haben eine spektrale Abhängigkeit. Die folgenden Reflektionsgrade sind nicht spektralabhängig, da man hier die Strahldichten über alle Wellenlängen integriert.

Der Anteil der aus einer Einfallsrichtung auftreffenden Gesamtenergie, der in eine Richtung reflektiert wird ist der gerichtet-gerichtete Gesamtreflektionsgrad ϱ'' .

$$\varrho''(\vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) = \frac{\int_0^{\infty} \varrho''_{\lambda}(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r, \vartheta, \varphi) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda}{\int_0^{\infty} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda} \quad (2.34)$$

Die Definitionen des gerichtet-hemisphärischen Gesamtreflektionsgrad $\varrho'(\vartheta, \varphi)$ und des hemisphärisch-gerichteten Gesamtreflektionsgrad $\varrho'(\vartheta_r, \varphi_r)$ sind ähnlich. Die in alle Richtungen reflektierte Energie lässt sich aus der aus einer Richtung einfallenden Gesamtenergie mit dem gerichteten-hemisphärischen Gesamtreflektionsgrad $\varrho'(\vartheta, \varphi)$ berechnen.

$$\varrho'(\vartheta, \varphi) = \frac{\int_0^{\infty} \varrho'_{\lambda}(\lambda, \vartheta, \varphi) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda}{\int_0^{\infty} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \, d\lambda} \quad (2.35)$$

Der hemisphärisch-gerichtete Gesamtreflektionsgrad $\varrho'(\vartheta_r, \varphi_r)$ ermöglicht dagegen die Berechnung der in eine Richtung reflektierten Gesamtenergie aus der aus allen Rich-

tungen einfallenden Gesamtenergie.

$$\varrho'(\vartheta_r, \varphi_r) = \frac{\int_0^\infty \varrho'_\lambda(\lambda, \vartheta_r, \varphi_r) L'_{\lambda,e}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty L'_{\lambda,e}(\lambda) d\lambda} \quad (2.36)$$

Die vorhergehenden Definitionen von Reflektionsgraden erfolgten in Abhängigkeit vom Einfallswinkel oder Reflektionswinkel. Die abschließend zu definierenden hemisphärischen Reflektionsgrade weisen diese Abhängigkeit nicht auf. Zur Beschreibung dieser hemisphärischen Größen werden die hemisphärischen, spektralen Energien benötigt. Zum einem die einfallende, hemisphärische, spektrale Energie, die wie folgt definiert ist

$$d^2\Phi_{\lambda,e}(\lambda) = dA d\lambda \int_{\triangle} L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega, \quad (2.37)$$

und als zweites die hemisphärisch, spektral, reflektierte Energie beschrieben durch

$$d^2\Phi_{\lambda,r}(\lambda) = dA d\lambda \int_{\triangle} \varrho'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi) L'_{\lambda,e}(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega. \quad (2.38)$$

Der Quotient aus dieser reflektierten und einfallenden Energie ergibt den hemisphärischen spektralen Reflektionsgrad

$$\varrho_\lambda(\lambda) = \frac{d^2\Phi_{\lambda,r}(\lambda)}{d^2\Phi_{\lambda,e}(\lambda)}. \quad (2.39)$$

Er stellt den Zusammenhang zwischen der aus allen Richtungen spektral einfallenden Energie und der hemisphärisch reflektierten, spektralen Energie dar. Durch Integration über alle Wellenlängen lässt sich nachfolgend der hemisphärische Gesamtreflektionsgrad ϱ berechnen. Die hemisphärisch einfallende Gesamtenergie wird durch Gleichung 2.26 definiert. Die hemisphärisch reflektierte Gesamtenergie ergibt sich zu

$$d\Phi_r = dA \int_{\triangle} \varrho'(\vartheta, \varphi) L'_e(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega. \quad (2.40)$$

Mit den vorhergehenden Beziehungen ergibt sich für den hemisphärischen Gesamtreflektionsgrad ϱ der Ausdruck

$$\varrho = \frac{d\Phi_r}{d\Phi_e} = \frac{dA}{d\Phi_e} \int_{\triangle} \varrho'(\vartheta, \varphi) L'_e(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta d\Omega. \quad (2.41)$$

Alle Reflektionsgrade sind des Weiteren wie die Emissions- und Absorptionsgrade von der Oberflächentemperatur abhängig. Weitere Informationen zum Reflektionsgrad und den Reziprozitätsbeziehungen zwischen den Reflektionsgraden werden ausführlich bei Siegel, Howell und Lohrengel [38] dargestellt.

2.2.5 Zusammenhang zwischen den optischen Eigenschaften

Ein einfacher Zusammenhang zwischen den optischen Eigenschaften kann mit einer Energiebilanz nachgewiesen werden. Die stationäre Energiebilanz für einen im Vakuum befindlichen Körper, auf den Strahlung einfällt, lautet

$$W_a + W_r + W_t = W_e, \quad (2.42)$$

mit dem absorbierten Teil W_a , dem reflektierten Teil W_r und dem transmittierten Teil W_t der hemisphärisch einfallenden Gesamtstrahlungsenergie W_e . Die Division dieser Energiebilanz durch die einfallende Strahlungsenergie W_e und die Beachtung der Definitionen des hemisphärischen Gesamtabsorptionsgrads, des hemisphärischen Gesamtreflektionsgrads und des hemisphärischen Gesamttransmissionsgrads ergeben die einfache Beziehung

$$\alpha + \varrho + \tau = 1 \quad (2.43)$$

zwischen den Oberflächeneigenschaften. Ersetzt eine spektrale, unter einem bestimmten Raumwinkel einfallende Energie die hemisphärische Gesamtenergie in der vorhergehenden Bilanzierung erhält man den Zusammenhang

$$\alpha'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) + \varrho'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) + \tau'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) = 1. \quad (2.44)$$

Auf diese Beziehung kann das Kirchhoffsche Gesetz ohne jegliche Einschränkung angewendet werden, und es ergibt sich

$$\varepsilon'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) + \varrho'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) + \tau'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) = 1. \quad (2.45)$$

Diese Beziehung lässt sich entsprechend der Einschränkungen für das Kirchhoffsche Gesetz (Tabelle 2.1) auf gerichtete Gesamtgrößen, hemisphärisch, spektrale Größen und hemisphärische Gesamtgrößen übertragen. Im Fall der Betrachtung eines undurchlässigen Körpers vereinfacht sich Gleichung 2.45 weiter zu

$$\varepsilon'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) + \varrho'(\lambda, \vartheta, \varphi, T) = 1. \quad (2.46)$$

Diese einfachen Beziehungen sind ein wesentlicher Baustein der Berechnung des gerichteten, spektralen Emissionsgrads, wie sie in Kapitel 3 dargestellt wird.

2.3 Grundlagen der elektromagnetischen Theorie

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen mit der Randelementenmethode basieren auf den Grundgleichungen zur Elektrodynamik. In den folgenden Abschnitten wird deshalb ein kurzer Überblick über die benötigten Grundlagen der

elektromagnetischen Theorie gegeben. Die kurze Einführung beginnt mit den Maxwell'schen Gleichungen zur Beschreibung der betrachteten Felder. Darauf aufbauend wird der für die Energiebilanzierung notwendige Poytingsche Satz vorgestellt. Abschliessend werden die Fresnelschen Gleichungen dargestellt, die es erlauben für glatte Trennflächen Reflektionsgrade zu berechnen.

2.3.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen basieren auf einer Kontinuumstheorie bei der die auftretenden Größen als kontinuierliche Variablen betrachtet werden. Dies gestattet durch geringe Modifikationen die Betrachtung von Feldgrößen im Vakuum und in Materie. Die vier Maxwell'schen Gleichungen ermöglichen die Beschreibung der Erzeugung des magnetischen und elektrischen Feldes durch Ströme und Ladungen. Des Weiteren zeigen sie die Wechselwirkung der beiden Felder im Fall zeitabhängiger Felder auf.

James Clerk Maxwell entwickelte in den Jahren 1861 bis 1864 eine vereinheitlichte Theorie zur Erklärung elektrischer und magnetischer Phänomene. Er fasste das Ampèresche Gesetz, das Induktionsgesetz von Faraday und das Gaußsche Gesetz zusammen und ergänzte diesen Satz an Gleichungen um den Maxwell'schen Verschiebungsstrom, um Konsistenz mit der Kontinuitätsgleichung sicher zu stellen.

Die 1. Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.47)$$

ist eine Verallgemeinerung des Durchflutungsgesetzes für zeitabhängige Vorgänge. Es besagt, dass die Wirbel eines Magnetfeldes \mathbf{H} von der Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$ und der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} abhängen. Wenn ein Strom fließt, ändert sich das elektrische Feld zwischen zwei geladenen Körpern und der Stromkreis wird durch einen entstehenden Verschiebungsstrom geschlossen.

Aus dem Induktionsgesetz von Faraday ergibt sich die 2. Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.48)$$

Es wird die Abhängigkeit der Wirbel des elektrischen Feldes \mathbf{E} von der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion \mathbf{B} ausgedrückt. Jede magnetische Flußänderung induziert eine proportionale Spannung bei Betrachtung einer geschlossenen Kurve.

Das Postulat nicht existierender magnetischer Monopole wird in der 3. Maxwell'schen Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.49)$$

durch die Quellenfreiheit des magnetischen Induktionsfeldes \mathbf{B} beschrieben.

Das Gaußsche Gesetz für elektrische Erscheinungen bildet die 4. Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (2.50)$$

Tabelle 2.2 Maxwell'sche Gleichungen

Differentielle Form	Integrale Form
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \, ds = \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A}$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \, ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A}$
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0$
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\oint \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho \, dV$

Das dielektrische Verschiebungsfeld \mathbf{D} wird als ein Quellenfeld definiert. Eine Ladung mit der Ladungsdichte ρ stellt die Quelle des elektrischen Feldes dar.

Diese differentielle Form der vier Gleichungen ist eine Darstellungsweise der Zusammenhänge der Maxwell'schen Theorie. Eine andere häufig genutzte Beschreibung ist die Integralform der vier Gleichungen. Eine Gegenüberstellung der differentiellen Form und der Integralform ist in Tabelle 2.2 zusammengestellt. Der verknüpfende Integralsatz für die 1. und 2. Gleichung ist der Gauß'sche Integralsatz, während die 3. und 4. Gleichung durch den Stokesschen Integralsatz verbunden sind. Dieser Formelsatz liefert 8 Gleichungen für 16 Unbekannte, wobei $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ nur eine Anfangsbedingung darstellt und man nur noch 7 Gleichungen zur Verfügung hat.

Die Maxwell'schen Gleichungen werden deshalb um Beziehungen zwischen den Feldgrößen, die die Materialeigenschaften abbilden, erweitert. Für die im Folgenden vorgestellten Beziehungen wird ein isotropes, lineares Material vorausgesetzt. Für die dielektrische Verschiebungsdichte gilt nach Henke [26] die Beziehung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} , \quad (2.51)$$

mit der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums ε_0 und der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r des Materials. Der Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke ergibt sich mit der Permeabilitätskonstanten des Vakuums μ_0 und der relativen Permeabilität μ_r des betrachteten Materials zu

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} . \quad (2.52)$$

Im Vakuum lassen sich diese Beziehungen vereinfachen. Für die relative Dielektrizitäts-

konstante und für die relative Permeabilität gilt

$$\varepsilon_r = 1 \quad \text{und} \quad \mu_r = 1 . \quad (2.53)$$

Eine weitere Beziehung ergibt sich nach Lehner [35] für die elektrische Stromdichte und die elektrische Feldstärke durch die Einführung der elektrischen Leitfähigkeit κ .

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (2.54)$$

Diese das Maxwellsche System ergänzenden Materialgleichungen erlauben das Aufstellen eines linearen Gleichungssystems zur Ermittlung aller 16 Unbekannten. Diese Möglichkeit der Berechnung der Feldgrößen verleiht der Maxwellschen Theorie ihren hohen Stellenwert bei der Lösung konkreter Probleme.

2.3.2 Der Poyntingsche Satz

Der Satz von Poynting ist der Energiesatz der Elektrodynamik. Er stellt die Verallgemeinerung des Energieerhaltungssatzes auf elektromagnetische Felder dar. Seine Herleitung und Interpretation ist im Rahmen dieser Arbeit für das Verständnis der im elektromagnetischen Feld vorhandenen Energie von zentraler Bedeutung, da im in Kapitel 3 vorgestellten Berechnungsverfahren die Energie eines Feldes zu berechnen ist. Als Ausgangspunkt wird die pro Zeit an einer Ladung verrichtete Arbeit

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV \quad (2.55)$$

betrachtet. Zur Beschreibung der elektrischen Stromdichte wird die 1. Maxwellsche Gleichung (Gl. 2.47) eingesetzt. Hieraus ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (2.56)$$

Zur weiteren Umformung dieser Beziehung wird folgende Rechenregel für Divergenzen genutzt

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} . \quad (2.57)$$

Mit Hilfe dieser Rechenregel ergibt sich die Gleichung

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (2.58)$$

Die 2. Maxwellsche Gleichung (Gl. 2.48) ermöglicht es $\text{rot } \mathbf{E}$ zu ersetzen und die pro Zeit an einer Ladung verrichtete Arbeit auszudrücken als

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (2.59)$$

Um nun eine häufig genutzte Form des Poyntingschen Satzes aufzustellen wird für das Kreuzprodukt $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ der Poynting Vektor \mathbf{S} eingeführt.

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.60)$$

Des weiteren nutzt man die Materialgleichungen 2.51 und 2.52, um die folgende Definition

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right), \quad (2.61)$$

mit der Energiedichte w , aufzustellen. Hierbei gilt

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right). \quad (2.62)$$

Mit den so eingeführten Größen ergibt sich aus Gleichung 2.59 eine häufig genutzte differentielle Form des Poyntingschen Satzes.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (2.63)$$

Einsetzen in Gleichung 2.55 und damit die Integration über ein Volumen V veranschaulicht die Bedeutung des Poyntingschen Satzes

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{S} \, dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} \, dV. \quad (2.64)$$

Diese Gleichung stellt die stationäre Energiebilanz für ein elektromagnetisches Feld in einem beliebigen Volumen dar. Ein Koeffizientenvergleich mit einer allgemeinen Energiebilanz erlaubt die Identifizierung der verschiedenen Terme. Hierzu wird nach Lehner [35] ein System betrachtet, das in irgendeiner Form eine Energie W enthält. Diese Energie W kann über die Systemgrenze strömen. Der Vektor \mathbf{v} kennzeichnet die pro Flächen- und Zeiteinheit durch die Systemgrenze strömende Energie. Die Energie des Systems ist über den Raum verteilt. Die Verteilung wird durch die Energiedichte w beschrieben. Die Energie ist eine Erhaltungsgröße, jedoch kann sie von der Form W in eine andere Form umgewandelt werden. Dies wird durch die pro Zeit- und Volumeneinheit umgewandelte Energie u berücksichtigt. Aus dieser Systembeschreibung ergibt sich die Energiebilanz für die Energieform W zu

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV + \int_V u \, dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dV \quad (2.65)$$

Demnach bildet der Poyntingsche Vektor \mathbf{S} die Energieflussdichte der elektromagnetischen Energie im Feld ab. Für die elektromagnetische Energiedichte ergibt sich die Darstellung durch den Term $1/2 \varepsilon E^2 + 1/2 \mu H^2$. Der Restterm $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ repräsentiert

dementsprechend in dem Energiesatz die elektromagnetischen Energieumwandlungsverluste. Die integrale Formulierung verdeutlicht die Aussage, dass die Leistung eines Feldes gleich der Umwandlungsverluste der Feldenergie zuzüglich dem Austritt des Energiestromes ist. Dies zeigt sich noch deutlicher durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf Gleichung 2.64.

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = - \int_A \mathbf{S} \, dA - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} \, dV \quad (2.66)$$

Für die weiteren Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit ist vor allem das Oberflächenintegral von Bedeutung. Es entspricht dem Fluss der Energie durch die betrachtete Oberfläche und diese Größe wird zur Berechnung des Reflektionsgrades im verwendeten Berechnungsverfahren benötigt.

2.3.3 Die Fresnelschen Gleichungen

Zur Berechnung von Strahlungseigenschaften einer Oberfläche auf Basis der Maxwell'schen Modelltheorie wurden von Augustin Jean Fresnel Gleichungen entwickelt. Die Fresnelschen Gleichungen ermöglichen bei Kenntnis der komplexen Brechzahl $\bar{n} = n + ik$ die Berechnung von gerichteten Reflektions-, Emissions- und Transmissionsgraden. Die komplexe Brechzahl beschreibt das Brechverhalten eines Materials durch die Brechzahl n und das Absorptionsverhalten durch die Absorptionskonstante k . Für die Berechnung wird die Wechselwirkung einer elektromagnetischen Welle mit der Trennfläche zwischen zwei dielektrischen Medien betrachtet. Die Wechselwirkung wird dabei durch die Eigenschaften beider Materialien beeinflusst. Zur Vereinfachung wird jedoch im Folgenden der im Rahmen dieser Arbeit interessanteste Fall der Phasengrenze zwischen Vakuum und einem Material beschrieben, d.h. es wird in den Gleichungen nur noch die komplexe Brechzahl des Materials verwendet. Die Gleichungen beschreiben die Fälle des senkrecht polarisierten und des parallel polarisierten einfallenden Feldes getrennt voneinander. Beim senkrecht polarisiert einfallenden Feld \mathbf{E}_\perp steht der Amplitudenvektor des elektrischen Feldes senkrecht auf der Einfallsebene der Welle. Das parallel polarisierte Feld \mathbf{E}_\parallel schwingt in der Einfallsebene. Diese beiden einfallenden Felder, die Einfallsebene und die im weiteren benötigten Größen werden in Abbildung 2.6 veranschaulicht und erläutert. Die einfallende Welle trifft unter dem Winkel ϑ auf, wird in ϑ_r -Richtung reflektiert und hat den Brechungswinkel χ . Zur Vereinfachung der Anwendung der Fresnelschen Gleichungen werden nach Siegel, Howell und Lohregel [38] und Kabelac [31] die Hilfsgrößen

$$a = \left[\frac{1}{2} \left([(n^2 - k^2 - \sin^2 \vartheta + 4n^2k^2)]^{1/2} + n^2 - k^2 - \sin^2 \vartheta \right) \right]^{1/2} \quad (2.67)$$

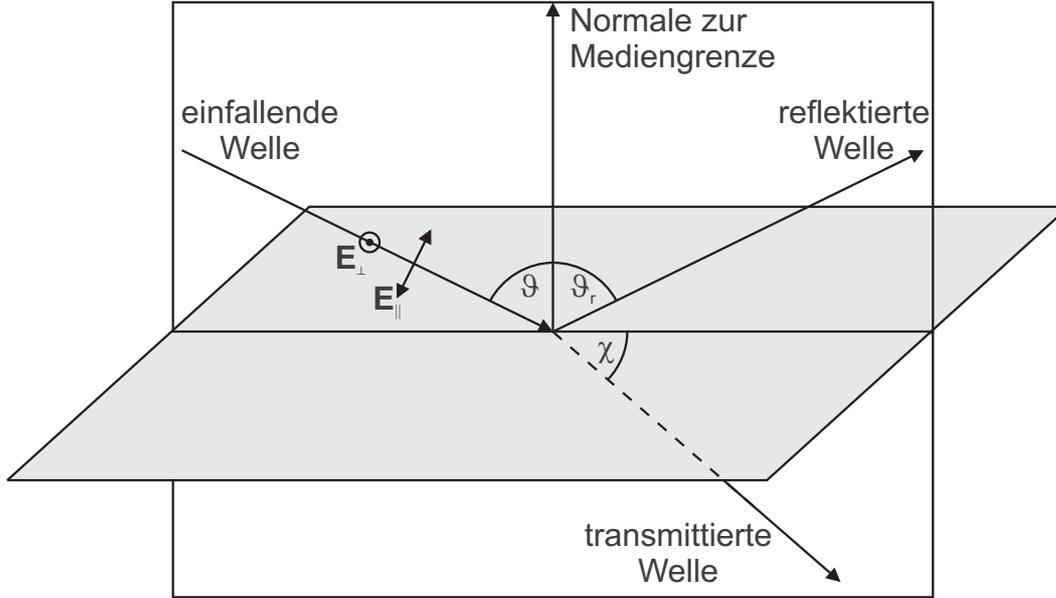


Abb. 2.6 Darstellung der für die Fresnelschen Gleichungen benötigten Felder und geometrischen Größen

und

$$b = \left[\frac{1}{2} \left([(n^2 - k^2 - \sin^2 \vartheta + 4n^2k^2)]^{1/2} - (n^2 - k^2 - \sin^2 \vartheta) \right) \right]^{1/2} \quad (2.68)$$

eingeführt. Hiermit ergibt sich der gerichtete-hemisphärische, spektrale Reflektionsgrad für eine glatte, dielektrische Oberfläche bei senkrecht polarisiertem Einfall zu

$$\varrho'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta) = \frac{a^2 + b^2 - 2a \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}{a^2 + b^2 + 2a \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}. \quad (2.69)$$

Unter einer glatten Oberfläche versteht man eine Oberfläche, die entweder keine Strukturierung aufweist oder deren Strukturen deutlich größer sind als die betrachteten Wellenlängen. Mit Hilfe des Reflektionsgrads aus Gleichung 2.69 lässt sich der gerichtete-hemisphärische, spektrale Reflektionsgrad für den parallel polarisierten Fall berechnen.

$$\varrho'_{\lambda\parallel}(\lambda, \vartheta) = \frac{a^2 + b^2 - 2a \sin \vartheta \tan \vartheta + \sin^2 \vartheta \tan^2 \vartheta}{a^2 + b^2 - 2a \sin \vartheta \tan \vartheta + \sin^2 \vartheta \tan^2 \vartheta} \varrho'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta) \quad (2.70)$$

Für die Betrachtung unpolarisierter Strahlung kann das einfallende Feld in zwei gleiche parallele und senkrechte Komponenten aufgeteilt werden. Der gerichtete-hemisphärische, spektrale Reflektionsgrad ist dann der Mittelwert der senkrechten und parallelen Komponente.

$$\varrho'_\lambda(\lambda, \vartheta) = \frac{\varrho'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta) + \varrho'_{\lambda\parallel}(\lambda, \vartheta)}{2} \quad (2.71)$$

Unter der Voraussetzung einer nicht transmissiven Oberfläche lässt sich nun der gerichtete, spektrale Emissionsgrad nach Gleichung 2.46 bestimmen.

$$\varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta) = 1 - \varrho'_\lambda(\lambda, \vartheta) \quad (2.72)$$

Eine spektrale Berechnung wird möglich durch über die Wellenlänge tabellierte Werte der komplexen Brechzahl. Einige geeignete Tabellen finden sich in den Stoffdatensammlungen von Touloukian [58], Gray [18] und Palik [47].

3 Die Berechnung des Emissionsgrades

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen basieren auf der Bestimmung der Energie eines Streufeldes eines auf eine beliebig geformte Oberfläche auftreffenden elektromagnetischen Feldes. Die nach der Maxwellschen Theorie auftretenden partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung der elektromagnetischen Wellen werden numerisch mit der Randelementenmethode gelöst. In diesem Kapitel werden der Berechnungsansatz, das verwendete Verfahren, die notwendigen Elemente zur Lösung des Streufeldproblems und die Energieberechnung vorgestellt und erläutert.

3.1 Der Berechnungsansatz

In diesem Abschnitt wird der Ansatz, auf dem die Berechnung des Emissionsgrads basiert, vorgestellt. Hierzu wird ein kurzer Überblick über die Berechnungsmöglichkeiten bei Streufeldproblemen gegeben. Dabei ist ein Streufeld das Feld, das sich ausbildet, wenn ein einfallendes Feld auf eine Mediengrenze trifft und dort gestreut wird. Es wird des Weiteren gezeigt auf welchem Wissensstand der Ansatz basiert. Hierzu werden einige grundlegende Gedankengänge vorab erstellter Arbeiten dargestellt. Es ist vorab festzuhalten, dass die verbreitetsten Ansätze zur Berechnung der Streufelder elektromagnetischer Wellen einige Gemeinsamkeiten aufweisen. Die Annahme ebener Wellen und die Trennung der Betrachtung von p- und s-polarisierten Wellen sind die Regel. Die für die Berechnungen notwendigen Vorgaben sind in aller Regel die Geometriedaten und spektralen Daten zu den komplexen Brechzahlen oder komplexen Dielektrizitätskonstanten der beteiligten Medien.

Einfache Ansätze sind für glatte Oberflächen möglich. Ein bekannter Ansatz hierzu ist die Berechnung der Reflektionsgrade nach Fresnel, wie sie in Abschnitt 2.3.3 dargestellt wird. Für strukturierte oder raue Oberflächen sind keine analytischen Lösungen, wie für die glatten Oberflächen bekannt. Es werden numerische Methoden genutzt, um die Streufeldprobleme zu lösen. Die am häufigsten genutzten Methoden sind die Methode der finiten Differenzen (FDM), die finite Elementemethode (FEM), die Randelementemethode (REM) und die Monte-Carlo-Methode. Eine gute Übersicht zu den einzelnen Verfahren wird von Lehner [35] dargestellt. Einige gute Tips zur Praxis der FDM, FEM und REM werden bei Mayr [43], Lorenz [41] und Gaul [15] gegeben.

Wesentliche grundlegende Arbeiten zur Berechnung von optischen Eigenschaften erfolgten oder wurden angeleitet durch M. Nieto-Vesperinas ([59], [60],[61]), A. A. Maradudin ([42]), und R. Buckius ([13],[11]). Da alle Arbeiten auf einem ähnlichen Gedankenkonstrukt basieren wird hier stellvertretend die Arbeit von R. Dimenna [13] näher

betrachtet. In dieser Arbeit wird im wesentlichen der gerichtet-gerichtete, spektrale Reflektionsgrad strukturierter Oberflächen berechnet. Dieser Reflektionsgrad lässt sich nach Stratton [56] und Brewster [8] als der π -fache Quotient aus der reflektierten Energie pro Raumwinkel $d\Phi_r/d\Omega_r$ bezogen auf die Fläche normal zur Reflektionsrichtung und der pro Raumwinkel einfallenden Energie $d\Phi_e/d\Omega_e$ berechnen

$$\varrho''_{\lambda}(\vartheta_0, \vartheta) = \frac{\pi}{\cos \vartheta} \frac{d\Phi_r}{d\Omega_r} \cdot \frac{d\Omega_e}{d\Phi_e} . \quad (3.1)$$

Der gerichtete, spektrale Reflektionsgrad wird anschließend durch Integration über alle Streuwinkel berechnet

$$\varrho'_{\lambda}(\vartheta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho''_{\lambda}(\vartheta_0, \vartheta) \cos \vartheta d\Omega_r . \quad (3.2)$$

Die entsprechenden Werte der Transmissionsgrade werden analog ermittelt. Mit Kenntnis dieser Reflektions- und Transmissionsgrade wird der gerichtete, spektrale Emissionsgrad nach dem Kirchhoffschen Gesetz berechnet zu

$$\varepsilon'_{\lambda}(\vartheta_0) = 1 - \varrho'_{\lambda}(\vartheta_0) - \tau'_{\lambda}(\vartheta_0) . \quad (3.3)$$

Aus diesen Vorüberlegungen ergibt sich die Aufgabe die pro Raumwinkel auftretenden Energien $d\Phi_r/d\Omega_r$ und $d\Phi_e/d\Omega_e$ zu ermitteln. Hierzu wird das Streufeld einer ebenen Welle, die auf eine Oberfläche wie sie in Abbildung 3.1 dargestellt ist trifft, bestimmt. Die z -Koordinate der Oberfläche stellt dabei eine Funktion von x dar. Bei der Berechnung werden der p - und s -polarisierte Fall getrennt betrachtet. Für das p -polarisierte Feld berechnet man das Streufeld des unter ϑ_0 einfallenden magnetischen Feldes

$$\mathbf{H}(x, z) = H_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (x \sin(\vartheta_0) - z \cos(\vartheta_0))} \quad (3.4)$$

und für das Streufeld des s -polarisierten Falls betrachtet man das einfallende elektrische Feld

$$\mathbf{E}(x, z) = E_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (x \sin(\vartheta_0) - z \cos(\vartheta_0))} . \quad (3.5)$$

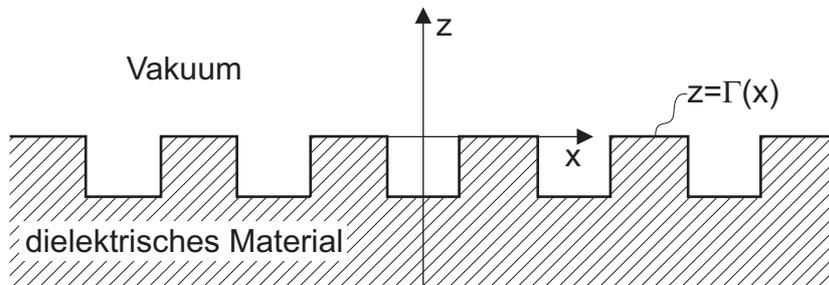


Abb. 3.1 Die modellierten Größen

Die einfallenden Felder weisen nur Amplituden in y -Richtung auf. Die Streufeldberechnung erfolgt durch die Lösung der entsprechenden Helmholtz-Gleichungen, die die Wellenausbreitung beschreiben. Im Folgenden soll nur ein kurzer Einblick in die Berechnung für den p -polarisierten Fall erfolgen. Für das magnetische Feld ergeben sich an der betrachteten Oberfläche die Randbedingungen

$$H_y^> |_{z=\Gamma(x)} = H_y^< |_{z=\Gamma(x)} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial H_y^>}{\partial n} |_{z=\Gamma(x)} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial H_y^<}{\partial n} |_{z=\Gamma(x)} . \quad (3.7)$$

Die Materialeigenschaften werden in den Rechnungen durch die wellenlängenabhängige Dielektrizitätskonstante $\bar{\varepsilon}$ berücksichtigt. Die Helmholtz-Gleichung wird mit Hilfe der Greenschen Funktion für eine Linienquelle gemäß Nieteo-Vesperinas [60] transformiert. Nach einer Koordinatentransformation auf Zylinderkoordinaten werden die Greenschen Funktionen durch Hankel Funktionen 1. Gattung und 0. Ordnung repräsentiert. Zur Bestimmung der Energien oberhalb und unterhalb der Oberfläche wird diese transformierte Gleichung über die Volumen oberhalb und unterhalb der Mediengrenze integriert. Durch Nutzung des Greenschen Satzes werden diese Volumenintegrale auf folgende Randintegrale über den beliebigen Rand Γ reduziert. Oberhalb der Mediengrenze gilt

$$-4\pi H_y^>(x, z) = \int_{\Gamma} \left(H_y^>(x', z') \frac{\partial G^>(x, z, x', z')}{\partial n} - G^>(x, z, x', z') \frac{\partial H_y^>}{\partial n} \right) d\Gamma , \quad (3.8)$$

und das Randintegral unterhalb der Oberfläche ergibt sich zu

$$-4\pi H_y^<(x, z) = \int_{\Gamma} \left(H_y^<(x', z') \frac{\partial G^<(x, z, x', z')}{\partial n} - G^<(x, z, x', z') \frac{\partial H_y^<}{\partial n} \right) d\Gamma . \quad (3.9)$$

Die Funktionen $G^>$ und $G^<$ sind die Greenschen Funktionen und die Ableitung $\partial/\partial n$ erfolgt entlang der Oberflächennormalen, die ins Vakuum gerichtet ist.

Da die Integrale über beliebige Ränder definiert sind, wird das Integral aus Gleichung 3.8 aus einem Integral über einen Rand im Unendlichen und einem Integral über die Materialoberfläche zusammengesetzt. Das Integral über den Rand im Unendlichen wird dabei gemäß Wolf [62] als die einfallende Welle aufgefasst. Das Integral aus Gleichung 3.9 wird durch eine Addition eines Integrals über einen Rand im negativen Unendlichen und eines Integrals über die betrachtete Oberfläche berechnet. Da angenommen wird, dass sich die Wellen ins negativ Unendliche exponentiell abschwächen und von dort kein Feld einfällt, ergibt sich das Integral über den Rand im negativen Unendlichen zu Null. Mit diesen Betrachtungen und unter Berücksichtigung der Randbedingungen

ergibt sich ein Paar gekoppelter Integralgleichungen für das magnetische Feld.

$$H_y^>(x, z) = H_y^{ein}(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[H(x') \left(-\Gamma'(x') \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right) G^>(x, z, x', z') \right. \\ \left. - G^>(x, z, x', z') L(x') \right] dx' \quad (3.10)$$

$$H_y^<(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[H(x') \left(-\Gamma'(x') \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right) G^<(x, z, x', z') \right. \\ \left. - \bar{\varepsilon} G^<(x, z, x', z') L(x') \right] dx' \quad (3.11)$$

Für die Terme $H(x')$ und $L(x')$ in diesen Gleichungen gilt

$$H(x') = H_y^>(x, z)|_{z'=\Gamma(x')} \quad (3.12)$$

$$L(x') = \left(-\Gamma'(x') \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right) H_y^>(x, z)|_{z'=\Gamma(x')} . \quad (3.13)$$

Die pro Raumwinkel transportierten Energien oberhalb und unterhalb der Mediengrenze werden gemäß Stratton [56] unter Beachtung des Poyntingschen Satzes berechnet. Für die reflektierte Energie ergibt sich nach der Auswertung der Poyntingschen Theorie

$$\frac{d\Phi_r}{d\vartheta_r} = \frac{l_y}{16\pi c \varepsilon_0} |r_p(\vartheta_r)|^2 , \quad (3.14)$$

und die transmittierte Energie ergibt sich zu

$$\frac{d\Phi_t}{d\vartheta_t} = \frac{l_y}{16\pi c \varepsilon_0 \varepsilon_r} |t_p(\vartheta_t)|^2 . \quad (3.15)$$

Die Terme für die Streufunktionen $r_p(\vartheta_r)$ und $t_p(\vartheta_t)$ ergeben sich zu

$$r_p(\vartheta_r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega/c(x \sin \vartheta_r + \Gamma(x) \cos \vartheta_r)} \{i\omega/c [\Gamma'(x) \sin \vartheta_r - \cos \vartheta_r] H(x) - L(x)\} dx$$

und

$$t_p(\vartheta_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{\varepsilon}\omega/c(x \sin \vartheta_t + \Gamma(x) \cos \vartheta_t)} \{i\sqrt{\varepsilon}\omega/c [-\Gamma'(x) \sin \vartheta_t + \cos \vartheta_t] H(x) + \varepsilon L(x)\} dx .$$

Abschließend wird für das einfallende Feld der Energiefluss mit dem Poythingschem Theorem ermittelt. Zur Berechnung des gerichtet-gerichteten spektralen Reflektionsgrads wird die Energie pro Raumwinkel des einfallenden Feldes und das Ergebnis aus

Gleichung 3.14 in die Gleichung 3.1 eingesetzt. Für den p-polarisierten Fall ergibt sich somit für den gerichtet-gerichteten spektralen Reflektionsgrad die Gleichung

$$\varrho''_{\lambda||}(\vartheta_0, \vartheta_r) = \frac{1}{8} \frac{1}{l_x \cos \vartheta_r \cos \vartheta_0} |r_p(\vartheta_r)|^2. \quad (3.16)$$

Analog lässt sich der gerichtet-gerichtete spektrale Transmissionsgrad durch die folgende Gleichung beschreiben.

$$\tau''_{\lambda||}(\vartheta_0, \vartheta_r) = \frac{1}{8} \frac{1}{\varepsilon l_x \cos \vartheta_t \cos \vartheta_0} |t_p(\vartheta_t)|^2. \quad (3.17)$$

Die Lösung der Integralgleichungen 3.10 und 3.11 erfolgt durch eine Diskretisierung der Integrale entlang der Oberfläche. Nützliche numerische Lösungsverfahren basierend auf dieser Diskretisierung werden bei Maradudin [42] und Nieto-Vesperinas [61] vorgestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wird der von Dinemma vorgestellte Berechnungsansatz aufgegriffen und erweitert. Es wird ebenfalls das Streufeld einer ebenen Welle an einer dielektrischen Oberfläche bestimmt. Allerdings stellt das einfallende Feld keine über den gesamten Raum ausgedehnte ebene Welle dar, sondern es wird nur, wie in Abschnitt 3.9 dargestellt, ein Teil der betrachteten Oberfläche voll bestrahlt, um negative Randeffekte zu minimieren. Die entscheidende Weiterentwicklung ist allerdings die Freiheit bei der Modellierung der Oberfläche. Das bisherige Verfahren beruht auf der Existenz einer zweifach differenzierbaren Funktion zur Beschreibung der Oberfläche. Bei dem hier vorgestellten Verfahren ist der Rand frei modellierbar und wird durch Randelemente angenähert. Hieraus ergibt sich ein weiterer Fortschritt. Während bei dem bisherigen Verfahren eine Diskretisierung nur über die x-Koordinaten erfolgte, ist es nun möglich die Oberfläche mit x- und z-Koordinaten zu diskretisieren. Dies ist vor allem bei der Diskretisierung steiler Flanken entscheidend, die im neuen Verfahren genauso diskretisiert werden können wie Abschnitte parallel zur x-Achse. Die numerische Umsetzung erfolgt mittels der Randelementmethode. Die Auswahl der Randelementenmethode als numerisches Verfahren für die Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit beruht dabei auf den im folgenden Abschnitt dargestellten Vorteilen und der guten Adaptierbarkeit des Ansatzes für dieses Verfahren.

3.2 Das REM-Verfahren

Die in diesem Abschnitt erfolgende Beschreibung des Verfahrens dient als Orientierungshilfe und roter Faden für die folgenden Erläuterungen der einzelnen Schritte. Die prinzipiellen Vorteile und Nachteile des Verfahrens werden vorab kurz umrissen.

Das im Rahmen dieser Arbeit eingesetzte Randelementenmethode(REM)-Verfahren ist ein numerisches Berechnungsverfahren für partielle Differentialgleichungen. Es benötigt

zur Lösung der Feldgleichungen lediglich eine Oberflächendiskretisierung und keine Diskretisierung des gesamten betrachteten Volumens wie es z.B. bei Finiten-Elementen-Methoden oder Finiten-Differenzen-Verfahren notwendig ist. Die Dimension des Problems wird somit um Eins reduziert. Dies führt auch zu einer Vereinfachung der Aufbereitung von Geometriedaten, da nur noch Informationen über den zu diskretisierenden Rand vorhanden sein müssen. Es reduziert außerdem die zur Berechnung der Lösung benötigte Anzahl an Knoten deutlich.

Um das Verfahren nutzen zu können werden Fundamentallösungen der zu lösenden Differentialgleichungen benötigt. Diese genauere analytische Vorbereitung ermöglicht jedoch eine höhere Genauigkeit der Ergebnisse. Außerdem können für jeden Punkt im untersuchten Gebiet die Feldgrößen berechnet werden. Dieser Vorteil wird durch die Voraussetzung homogener Gebiete erkauft. Innerhalb solcher homogenen Gebiete sind die Materialeigenschaften konstant. Zur Berechnung inhomogener Gebiete muss man Substrukturtechniken einsetzen.

Ein für diese Arbeit entscheidender Vorteil des REM-Verfahrens ist die Möglichkeit einer einfachen Modellierung von halbunendlichen Gebieten, die sich von einem endlichen Rand her ausbreiten. Während bei einem FEM-Verfahren ein halbunendliches Gebiet nur angenähert werden kann, ist es beim REM-Verfahren vollständig als Modell nutzbar. Die hieraus resultierende Reduzierung des Rechenaufwands, wenn nur Randwerte und einige wenige Feldgrößen benötigt werden, ist signifikant. Allerdings ergibt sich beim REM-Verfahren bei Verwendung der Kollokations- oder Galerkin-Methode ein nicht symmetrisches, vollbesetztes Gleichungssystem. Diese Systeme sind jedoch nur mit einem hohen Numerikaufwand lösbar. Eine Übersicht der Vor- und Nachteile des REM-Verfahrens gemäß Gaul [15] ist in Tabelle 3.1 zusammengestellt.

Die Grundlage des REM-Verfahrens ist der Einsatz gewichteter Residuen. Ihre Verwendung führt zur Berechnung einer Lösung von Feldproblemen nicht direkt aus den Feldgleichungen, sondern aus dem integralen Mittel über das mit Wichtungsfunktionen gewichtete, gesamte Gebiet. Der Ausgangspunkt für das REM-Verfahren, dessen prinzipieller Ablauf in Abbildung 3.2 dargestellt ist, ist die zu lösende Differentialgleichung mit ihren Randbedingungen. Unter Anwendung eines Verfahrens der gewichteten Residuen mit Einbau der Fundamentallösung wird diese Differentialgleichung zur Herleitung der Integralgleichung des inneren Bereiches genutzt. Zur Transformation der Integralgleichung auf den Rand verwendet man für zwei- und dreidimensionale Probleme die 2. Greensche Formel. In Kombination mit der Diskretisierung des Randes ermöglicht die aufgestellte Randintegralgleichung die numerische Integration entlang der einzelnen Randelemente. Jedes Randelement liefert so einen Beitrag zu dem durch die Wichtung und Diskretisierung entstandenen Gleichungssystem. Beim Zusammenstellen des Systems sind die Randbedingungen zu berücksichtigen. Die Lösung des Glei-

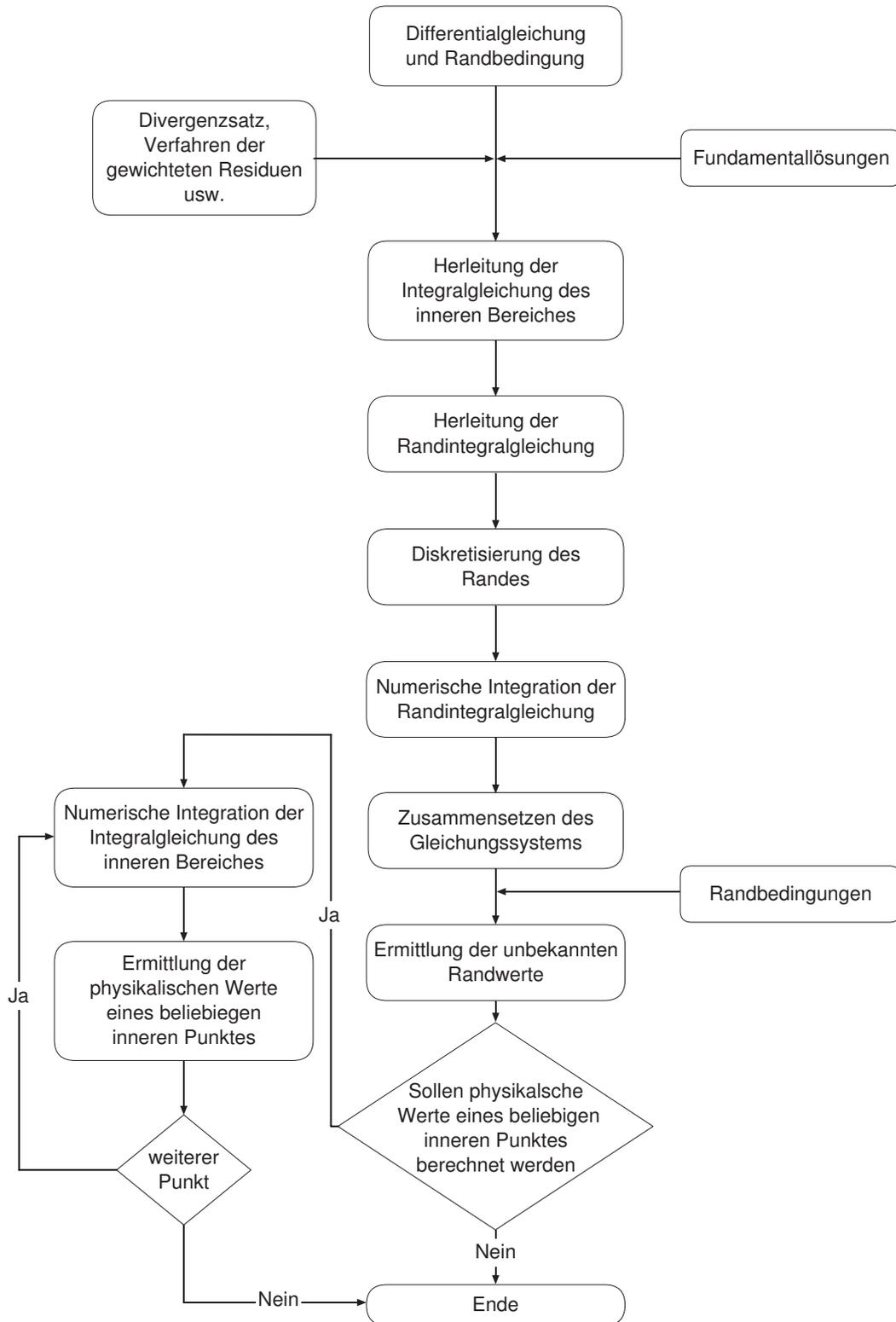


Abb. 3.2 Ablaufdiagramm der REM

Tabelle 3.1 Vor- und Nachteile der Randlelementenmethode

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none"> • nur der Rand muss diskretisiert werden, dadurch vereinfacht sich die Geometriedatenaufbereitung • einfachere Modelle für Probleme mit unendlichen oder halbunendlichen Gebieten • Feldgrößen können gezielt für Punkte im untersuchten Gebiet berechnet werden • reduzierter Numerikaufwand bei der reinen Berechnung von Randwerten 	<ul style="list-style-type: none"> • nicht symmetrisches, vollbesetztes Gleichungssystem bei Kollokations- und Galerkin-Verfahren • nur homogene Gebiete sind berechenbar, für inhomogene Gebiete benötigt man Substrukturtechniken • zur Realisierung des Verfahrens werden Fundamentallösungen der Differentialgleichung benötigt • Kenntnisse im Umgang mit REM-Methoden sind nicht so verbreitet wie bei den FEM-Methoden

chungssystems liefert die unbekanntenen Randwerte. Werden nur die Randwerte gesucht ist die Berechnung abgeschlossen. Feldwerte an beliebigen inneren Punkten werden durch eine numerische Integration der Integralgleichung des inneren Bereiches berechnet. Die Berechnung ist abgeschlossen, wenn für alle benötigten Punkte die Feldwerte berechnet sind.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Berechnungsverfahren löst die Differentialgleichungen im zweidimensionalen Raum für die Fälle einer einfallenden, parallel(p)-polarisierten und einer senkrecht(s)-polarisierten Welle getrennt voneinander und führt abschließend eine Mittelung zur Berechnung des unpolarisierten Falls durch. Die folgenden Abschnitte erläutern das Vorgehen für die p-polarisierte, einfallende Welle. Der sich aus den Betrachtungen ergebende Formelsatz wird im Abschnitt 3.13 für die s-polarisierte Welle angepasst. Zum Abschluss erfolgt eine kurze Beschreibung des realisierten Programms zur Nutzung des REM-Verfahrens.

3.3 Das Aufstellen der Wellendifferentialgleichung

Eine p-polarisierte Welle wird durch die folgenden Felder beschrieben.

$$\mathbf{H} = (0, H_y, 0) e^{i\omega t} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z) e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

Für die Berechnung der Energiestromdichte einer polarisierten Welle ist die Kenntniss eines dieser beiden Felder ausreichend. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 3.12 genau-

er erläutert. Zur Bestimmung des \mathbf{H} -Feldes mittels der REM wird die das magnetische Feld beschreibende Differentialgleichung für H_y benötigt.

Der Amplitudenwert H_y stellt eine komplexe Größe dar. Diese komplexe Amplitude $H_y = \hat{H}_y e^{i\phi}$ legt den zeitunabhängigen Teil des magnetischen Feldes \mathbf{H} fest. Dieser zeitunabhängige Teil bleibt bei der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten zeitharmonischen Betrachtung erhalten. Veränderliche zeitliche Schwingungsanteile werden nicht modelliert und müssen somit beim Übergang zur Zeigerdarstellung nicht berücksichtigt werden. Zur übersichtlicheren Darstellung werden in den folgenden Abschnitten alle Amplituden als komplexe Amplituden aufgefasst, ohne dies gesondert zu kennzeichnen. Ein ausführlicherer Überblick über die Darstellung von Schwingungen in der komplexen Ebene wird in Anhang B gegeben.

Ausgangspunkt der Herleitung der Differentialgleichungen für H_y ist eine Betrachtung für die Wellenausbreitung im Vakuum. Eine Beschreibung der Ausbreitung der Feldgrößen wird durch die 1. und 2. Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.20)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.21)$$

ermöglicht. Werden in die 2. Gleichung die Materialbeziehungen für das elektrische Feld 2.51 und das magnetische Feld 2.52 eingesetzt, so ergibt sich ein Ansatz für die Wellendifferentialgleichung des magnetischen Feldes.

$$\mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Die Differentiation dieses Ansatzes nach der Zeit und Einsetzen in die 1. Maxwell'sche Gleichung 3.20 ergibt

$$\mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

Auf $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ wird die Rechenregel

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} \quad (3.24)$$

angewendet. Es wird dabei berücksichtigt das aufgrund der 4. Maxwell'schen Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{H} = \mathbf{0}$ gilt und das der Operator Δ der Laplace-Operator ist, für den im Kartesischen 3D-Koordinatensystem $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ gilt. Hiermit werden die bisherigen Ergebnisse zur Wellengleichung für das magnetische Feld

$$\Delta \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

zusammengefasst. Im Vakuum gilt des Weiteren für die Permeabilitäten und die Dielektrizitätskonstanten ein Zusammenhang mit der Lichtgeschwindigkeit in der Form

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 = \frac{1}{c^2} . \quad (3.26)$$

Außerdem gilt bei zeitharmonischen, ebenen Wellen für die Zeitableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \omega . \quad (3.27)$$

Für die Betrachtung des 2D-Falls ist $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ eine Funktion der Koordinaten x , z und der Zeit t . Dies vereinfacht die Differentialgleichung 3.25. Es ergibt sich mit den Beziehungen 3.26 und 3.27 die für die REM benötigte Wellendifferentialgleichung für die magnetische Welle oberhalb der Oberfläche im Vakuum $H_y^>$ zu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) H_y^> = 0 . \quad (3.28)$$

Diese für das Vakuum aufgestellte Gleichung lässt sich auf ein nicht ferromagnetisches, aber dielektrisches Material übertragen. Denn für diese Materialien gilt mit der komplexen Dielektrizitätskonstanten $\bar{\varepsilon}(\omega)$ für den Zusammenhang zwischen Permeabilität, Dielektrizitätskonstante und Lichtgeschwindigkeit

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 = \frac{\bar{\varepsilon}(\omega)}{c^2} . \quad (3.29)$$

Für die komplexe Dielektrizitätskonstante $\bar{\varepsilon}(\omega)$ gilt dabei die folgende Verknüpfung mit der komplexen Brechzahl

$$\bar{\varepsilon}(\omega) = \bar{n}^2(\omega) . \quad (3.30)$$

Mit dem Zusammenhang 3.29 ergibt sich für die Wellendifferentialgleichung der magnetischen Feldkomponente $H_y^<$ unterhalb der Oberfläche im dielektrischen Material

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{\varepsilon}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) H_y^< = 0 . \quad (3.31)$$

3.4 Die Randbedingungen

Die Lösung einer Differentialgleichung ist immer abhängig von Anfangs- oder Randbedingungen. Für die in dieser Arbeit durchgeführte REM-Berechnung werden Rand- und Übergangsbedingungen für die Trennfläche zwischen Vakuum und Material benötigt. Die erste Randbedingung ist die Gleichheit der Feldwerte auf dem Rand.

$$H_y^> |_{Rand} = H_y^< |_{Rand} = H_{yr} \quad (3.32)$$

Die zweite Randbedingung berücksichtigt die Stetigkeit des Übergangs der p-polarisierten, elektromagnetischen Welle zwischen Vakuum und dem durch $\bar{\varepsilon}(\omega)$ charakterisiertem Material.

$$\frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}(\omega)} \frac{\partial H_y^<}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial H_{yr}}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.33)$$

Der Ableitungsterm $\partial/\partial\mathbf{n}$ ist dabei die Ableitung in Richtung der Oberflächennormalen, die in das Vakuum zeigt. Für diese Richtungsableitung gilt dabei in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y + \frac{\partial f}{\partial z} n_z . \quad (3.34)$$

3.5 Die Fundamentallösungen

Das genutzte REM-Verfahren basiert auf dem Verfahren der gewichteten Residuen. Die für die Berechnung verwendeten Wichtungsfunktionen sind die Fundamentallösungen der Differentialgleichungen. Es werden demnach die Fundamentallösungen für die Gebiete unter- und oberhalb der Trennfläche der Medien benötigt.

Die aufgestellte Differentialgleichung für das Wellenausbreitungsproblem 3.28 wird üblicherweise als Helmholtz-Gleichung bezeichnet. Sie ist eine elliptische, partielle, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Es wird insbesondere die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung betrachtet und ihre Fundamentallösung dargestellt. Die Fundamentallösung stellt die Lösung einer homogenen Differentialgleichung mit dem Dirac-Impuls auf der rechten Seite für ein unendliches Gebiet dar. Erfüllt die Fundamentallösung gewählte Randbedingungen in einem bestimmten Gebiet wird sie üblicherweise als „Green-sche Funktion“ bezeichnet. Der Ausgangspunkt ist die Bestimmungsgleichung für die Fundamentallösung G im zweidimensionalen Raum oberhalb der Medientrenngrenze.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G = -\delta(x - \xi) \delta(z - \zeta) \quad (3.35)$$

Das negative Vorzeichen für die rechte Seite der Gleichung wird gewählt, damit in den endgültigen Systemmatrizen nur positive Vorzeichen auftreten. Hierdurch lässt sich die Numerik beschleunigen. Die Überführung der Gleichung 3.35 auf Zylinderkoordinaten mit Ursprung im Ladepunkt (ξ, ζ) liefert unter Berücksichtigung der Radialsymmetrie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} . \quad (3.36)$$

Der Ladepunkt (ξ, ζ) stellt dabei einen beliebigen Punkt im inneren des betrachteten Gebiets dar, der im Verlauf des Verfahrens auf den Rand transformiert wird. Unter Berücksichtigung, dass für die δ -Distribution gilt

$$\delta[a(x - \xi)] = \frac{1}{a} \delta(x - \xi) \quad (3.37)$$

und die Substitutionen

$$r = \frac{c}{\omega} r' \quad , \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial r'} \quad (3.38)$$

eingeführt werden, lässt sich die gegebene Problemstellung 3.35 als eine Besselsche Differentialgleichung 0. Ordnung in r' darstellen.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{\partial}{r' \partial r'} + 1 \right) G = -\frac{\delta(r')}{2\pi r'} \quad (3.39)$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung wird durch Nutzung eines Ansatzes mit der homogenen Lösung gemäß Abramowitz [1]

$$G(r') = C_1 J_0(r') + C_2 Y_0(r') \quad (3.40)$$

erreicht. Die Funktion $J_0(r')$ ist die Besselsche Funktion erster Gattung 0. Ordnung und der Term $Y_0(r')$ ist die Besselsche Funktion zweiter Gattung 0. Ordnung. Zur Verdeutlichung des Verhaltens der Besselschen Funktionen sind sie im Anhang D dargestellt. Die Besselsche Funktion $J_0(r')$ ist in $r' = 0$ stetig. Die Besselsche Funktion zweiter Gattung 0. Ordnung $Y_0(r')$ weist dagegen am Ort $r' = 0$ eine logarithmische Singularität auf. Damit stellt $J_0(r')$ eine echt homogene Lösung dar, während $Y_0(r')$ die homogene Differentialgleichung im Punkt $r' = 0$ nicht erfüllt. Daher trägt $Y_0(r')$ zum Dirac-Impuls auf der rechten Seite bei. Es ergeben sich folgende Werte für die beiden Funktionen wenn $r' \rightarrow 0$ geht.

$$J_0(0) = 1 \quad , \quad \lim_{r' \rightarrow 0} Y_0(r') = \frac{2}{\pi} \ln r' \quad (3.41)$$

Die Bestimmung der Konstanten C_2 erfolgt durch die Überprüfung der Impulsbedingung. Bei der Überprüfung wird das Verhalten der Fundamentallösung für kleine r' betrachtet. Die Integration der Besselschen Differentialgleichung 3.39 führt auf

$$\int_{\Omega_\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial r'^2} + \frac{\partial G}{r' \partial r'} + G \, d\Omega = \int_{\Omega_\infty} \nabla^2 G + G \, d\Omega = \int_{\Omega_\infty} -\frac{\delta(r')}{2\pi r'} \, d\Omega = -1 \quad (3.42)$$

Der Integralanteil $\int G \, d\Omega$ ergibt sich für kleine r' zu 0 und entfällt damit bei den weiteren Betrachtungen. Der Gaußsche Integralsatz ermöglicht die Umformung der linken Seite in ein Oberflächenintegral über den Rand Γ .

$$\int_{\Omega_\infty} \operatorname{div}(\nabla G) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \nabla G \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.43)$$

Die Ableitung nach dem Winkel verschwindet wegen der Radialsymmetrie. Wird als Integrationsfläche ein Kreisumfang mit dem Ursprung als Mittelpunkt gewählt, lautet die Impulsbedingung gemäß Gaul [15]

$$\int \frac{\partial G}{\partial r'} \, d\Gamma = -1 \quad (3.44)$$

Die nur von r' abhängige Fundamentallösung ist auf dem Kreisumfang Γ konstant. Damit ergibt sich aus der Impulsbeziehung die Bestimmungsgleichung für C_2 zu

$$\frac{2C_2}{\pi r'} 2\pi r' = -1, \quad (3.45)$$

und die Konstante C_2 zu

$$C_2 = -\frac{1}{4}. \quad (3.46)$$

Da die Funktion $J_0(r')$ eine echte homogene Lösung der Differentialgleichung ist, trägt sie nicht zum Dirac-Impuls bei. C_1 kann daher frei gewählt werden. Zur Berechnung des reflektierten Feldes ist es von Vorteil wenn C_1 so gewählt wird, dass die Fundamentallösung die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (s. Anhang A) im Unendlichen erfüllt. Dem entsprechend muss die Fundamentallösung für $r' \rightarrow \infty$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial G}{\partial t} + c \frac{\partial G}{\partial r} = 0, \quad r' \rightarrow \infty \quad (3.47)$$

erfüllen. Für die Ermittlung der Konstanten C_1 wird die Bedingung in Frequenzbereichsformulierung für r' genutzt.

$$iG + c \frac{\partial G}{\partial r'} = 0, \quad r' \rightarrow \infty \quad (3.48)$$

Für große r' gelten dabei nach Abramowitz [1] die asymptotischen Formeln

$$J_0(r') = \sqrt{\frac{2}{\pi r'}} \left(1 - \frac{1}{16r'^2}\right) \cos\left(r' - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8r'}\right) \quad (3.49)$$

$$Y_0(r') = \sqrt{\frac{2}{\pi r'}} \left(1 - \frac{1}{16r'^2}\right) \sin\left(r' - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8r'}\right) \quad (3.50)$$

Werden diese asymptotischen Formeln in Gleichung 3.48 eingesetzt, ergibt sich C_1 zu

$$C_1 = \frac{i}{4}. \quad (3.51)$$

Werden die Konstanten C_1 und C_2 in den Lösungsansatz 3.40 eingesetzt, ergibt sich die Fundamentallösung für das Vakuum oberhalb der Medientrennfläche zu

$$G^> = \frac{i}{4} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{1}{4} Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right). \quad (3.52)$$

Die Fundamentallösung unterhalb der Trenngrenze ergibt sich aus der leicht abgewandelten Bestimmungsgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{\varepsilon}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}\right) G = -\delta(x - \xi) \delta(z - \zeta). \quad (3.53)$$

Nach analogem Vorgehen wie bei der vorhergehenden Fundamentallösung lässt sich die Fundamentallösung für das Medium unterhalb der Medientrenngrenze bestimmen zu

$$G^< = \frac{i}{4} J_0\left(\bar{n} \frac{\omega r}{c}\right) - \frac{1}{4} Y_0\left(\bar{n} \frac{\omega r}{c}\right) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\bar{n} \frac{\omega r}{c}\right). \quad (3.54)$$

Die Funktion $H_0^{(1)}$ ist dabei die Hankelsche Funktion erster Gattung 0. Ordnung. Die Koordinate r wird aus den Kartesischen Koordinaten des Feldpunktes x, z , der auf dem betrachteten Randelement liegt, und den Koordinaten ξ, ζ des Ladepunktes berechnet.

$$r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = ((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2} \quad (3.55)$$

Die Fundamentallösungen $G^>$ und $G^<$ erfüllen die Bestimmungsgleichungen 3.35 und 3.53 für jeweils halboneendliche Räume verschiedener Medien. Darüber hinaus erfüllen sie die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. Daher werden diese Fundamentallösungen als „Greensche Funktionen“ für das zu lösende Streufeldproblem bezeichnet.

3.6 Herleitung der Randintegralgleichung

Der Ausgangspunkt der Herleitung der Randintegralgleichung sind die gewichteten Formen der Wellendifferentialgleichungen für die Gebiete oberhalb und unterhalb der Trenngrenze.

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) H_y^> \right) G^> d\Omega = 0 \quad (3.56)$$

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{\epsilon}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) H_y^< \right) G^< d\Omega = 0 \quad (3.57)$$

Die Wichtung erfolgt hier mit den jeweiligen Greenschen Funktionen $G^>$ und $G^<$. Trotz dieser Formulierung des Problems mit gewichteten Residuen ist eine exakte Lösung der Integralgleichungen gleichbedeutend mit der exakten Lösung der Differentialgleichungen. Die Integralausdrücke in den Gleichungen 3.56 und 3.57 können, da sich für jeden Ladepunkt $\boldsymbol{\xi}$ andere Fundamentallösungen ergeben, nur verschwinden, wenn die Klammerausdrücke verschwinden, d. h. die Differentialgleichungen erfüllt sind.

Im nächsten Schritt erfolgt die Transformation auf den Rand des untersuchten Gebietes. Dies entspricht der partiellen Integration der Differentialoperatoren über die entsprechenden Koordinaten. Im 2D-Fall werden die partiellen Integrationen durch den Greenschen Satz in der Ebene ergänzt, während im 3D-Fall der Gaußsche Integralsatz eingesetzt wird. Das Ergebnis dieser Bemühungen fasst die 2. Greensche Formel zusammen, die ausführlich bei Gaul [15] beschrieben wird und allgemein lautet

$$\int_{\Omega} ((\nabla^2 u + k^2 u) w - (\nabla^2 w + k^2 w) u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma. \quad (3.58)$$

Bei der Anwendung dieser Formel gilt für den Bereich oberhalb der Trenngrenze im Vakuum $u = H_y^>$, $w = G^>$ und $k = \omega/c$. Für den Bereich unterhalb der Trenngrenze im dielektrischen Material gilt $u = H_y^<$, $w = G^<$ und $k = \bar{n}\omega/c$. Es ist des Weiteren

zu beachten, dass sich bei Verwendung der selben Normalenableitung vom Material ins Vakuum die Vorzeichen der rechten Seite der 2. Greenschen Formel oberhalb der Trenngrenze umkehren. Hier gilt somit

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial^<}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial^>}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.59)$$

Damit ergeben sich folgende Ausgangsgleichungen für die Transformierung auf den Rand

$$\int_{\Omega} \left(\left(\nabla^2 G^> + \frac{\omega^2}{c^2} G^> \right) H_y^> \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(G^> \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} - H_y^> \frac{\partial G^>}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (3.60)$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\left(\nabla^2 H_y^> + \frac{\omega^2}{c^2} H_y^> \right) G^> \right) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \left(\left(\nabla^2 G^< + \frac{\bar{\epsilon}\omega^2}{c^2} G^< \right) H_y^< \right) d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(G^< \frac{\partial H_y^<}{\partial \mathbf{n}} - H_y^< \frac{\partial G^<}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (3.61)$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\left(\nabla^2 H_y^< + \frac{\bar{\epsilon}\omega^2}{c^2} H_y^< \right) G^< \right) d\Omega.$$

Für die weiteren Umformungen wird berücksichtigt, dass $\nabla^2 H_y^> + \omega^2/c^2 H_y^> = 0$ genauso gelten soll wie $\nabla^2 H_y^< + \bar{\epsilon}\omega^2/c^2 H_y^< = 0$. Die Filtereigenschaften der Dirac-Distribution liefern aufgrund der Verwendung der Fundamentallösungen als Wichtungsfunktionen für die linke Seite der Gleichungen 3.60 und 3.61 die Zusammenhänge.

$$\int_{\Omega} \left(\left(\nabla^2 G^> + \frac{\omega^2}{c^2} G^> \right) H_y^> \right) d\Omega = \int_{\Omega} -\delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) H_y^>(\mathbf{x}) d\Omega = -H_y^>(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.62)$$

$$\int_{\Omega} \left(\left(\nabla^2 G^< + \frac{\bar{\epsilon}\omega^2}{c^2} G^< \right) H_y^< \right) d\Omega = \int_{\Omega} -\delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) H_y^<(\mathbf{x}) d\Omega = -H_y^<(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.63)$$

Das Feld oberhalb der Mediengrenze $H_y^>$ setzt sich aus dem einfallenden Feld H_y^{ein} und dem berechneten, gestreuten Feld H_y^{ost} zusammen.

$$H_y^>(\boldsymbol{\xi}) = H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + H_y^{ost}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.64)$$

Die Zusammenfassung der bisherigen Erkenntnisse und die Berücksichtigung des einfallenden Feldes oberhalb der Trenngrenze liefert demnach ein Paar inhomogener Integralgleichungen für die Felder $H_y^>$ und $H_y^<$.

$$H_y^>(\boldsymbol{\xi}) = H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) - \int_{\Gamma} \left(G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial H_y^>(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - H_y^>(\mathbf{x}) \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (3.65)$$

$$H_y^<(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \left(G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial H_y^<(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - H_y^<(\mathbf{x}) \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (3.66)$$

Die Richtungsableitung der Felder \mathbf{H} und \mathbf{G} erfolgt in Richtung der vom Material wegweisenden Oberflächennormalen \mathbf{n} . Für die Komponenten dieses Normalenvektors eines konstanten, durch \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 aufgespannten Randes gilt nach Stöcker [55]

$$n_x = -(z_2 - z_1) \quad (3.67)$$

$$n_z = x_2 - x_1 . \quad (3.68)$$

Aus den Integralgleichungen 3.65 und 3.66 werden die Randintegralgleichungen ermittelt, indem der Ladepunkt $\boldsymbol{\xi}$ auf den Rand wandert. Die so erhaltene Gleichung enthält nur noch Randgrößen. Es ist demnach die Grenzwertbetrachtung $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \Gamma$ durchzuführen. Hierzu wird der Originalrand zuerst, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, durch Addition eines Kreiselements so erweitert, das $\boldsymbol{\xi}$ zwar auf dem Originalrand liegt, jedoch durch die Erweiterung noch ein innerer Punkt des betrachteten Gebietes bleibt. Das Erweiterungselement wird in Übereinstimmung mit der in Abbildung 3.4 dargestellten Geometrie wie folgt parametrisiert.

$$d\Gamma_\zeta = \varsigma d\varphi \quad (3.69)$$

Für r ergibt sich entsprechend der Parametrisierung und der dargestellten Geometrie

$$r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \varsigma . \quad (3.70)$$

Im folgenden entspricht die Grenzwertbetrachtung $\varsigma \rightarrow 0$ der Verschiebung des Ladepunkts auf den Rand. Hierbei ist insbesondere das singuläre Verhalten der Fundamentallösung zu beachten.

Zur Realisierung der Grenzwertbetrachtung werden die Grenzwerte der Greenschen Funktion $G^>$ und ihrer Normalenableitung $\partial G^>/\partial \mathbf{n}$ benötigt. Für den Grenzwert der Hankelschen Funktion 1. Gattung 0. Ordnung gilt nach Abramowitz [1] mit $r' = \omega r/c$

$$\lim_{r' \rightarrow 0} i H_0^{(1)}(r') = -\frac{2}{\pi} \ln(r') . \quad (3.71)$$

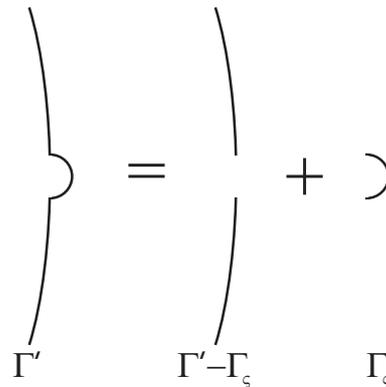


Abb. 3.3 Addition eines Kreiselements zur Erweiterung des Randes [15]

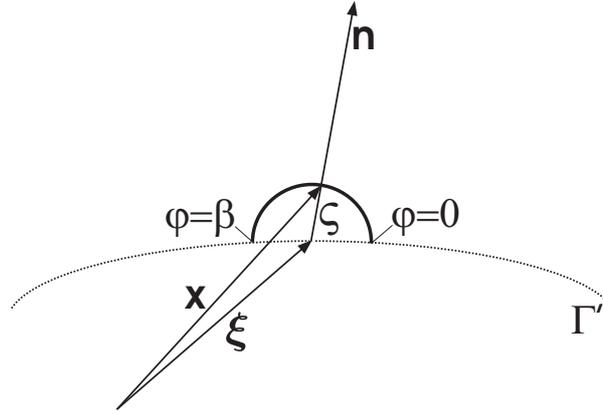


Abb. 3.4 Geometrie zur Grenzwertbetrachtung [15]

Der Grenzwert der Greenschen Funktion oberhalb der Trenngrenze ergibt sich somit durch einsetzen der vorhergehenden Grenzwertbeziehung in Gleichung 3.52 zu

$$\lim_{r \rightarrow 0} G^> = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\omega r}{c} \right). \quad (3.72)$$

Die Ableitung der Greenschen Funktion nach r ergibt

$$\frac{\partial G^>}{\partial r} = -\frac{i}{4} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right). \quad (3.73)$$

Mit dieser Ableitung lässt sich die Richtungsableitung in Richtung der Oberflächennormalen wie folgt darstellen

$$\frac{\partial G^>}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial G^>}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{i}{4} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.74)$$

Nach Abramowitz [1] gilt für den Grenzwert der Hankelschen Funktion 1. Gattung und 1. Ordnung

$$\lim_{r' \rightarrow 0} i H_1^{(1)}(r') = \frac{2}{\pi r'}. \quad (3.75)$$

Diesen Grenzwert in Gleichung 3.74 eingesetzt liefert den Grenzwert für die Normalenableitung der Greenschen Funktion

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial G^>}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\omega/c}{2\pi(\omega r/c)} \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2}. \quad (3.76)$$

Mit der Kenntnis der Grenzwerte der Greenschen Funktion und ihrer Normalenableitung ist es möglich, eine Grenzwertbetrachtung für die Summanden in Gleichung 3.65 durchzuführen. Für den ersten Summanden des Integrals in Gleichung 3.65 ergibt sich der folgende Zusammenhang bei der Grenzwertbetrachtung unter Beachtung der Gleichung

chung 3.72.

$$\begin{aligned} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma' - \Gamma_\varsigma} -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \\ &+ \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varsigma} -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.77)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite liefert im Grenzübergang ein schwach singuläres Integral über den Originalrand. Der zweite Integralterm auf der rechten Seite liefert keinen Beitrag zum Gesamtintegral. Dies lässt sich mit der Regel von l'Hospital nachweisen.

$$\begin{aligned} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varsigma} -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\beta} \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} \ln \left(\frac{\omega \varsigma}{c} \right) \varsigma d\varphi \\ &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\beta} \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} \frac{\left(\ln \left(\frac{\omega \varsigma}{c} \right) \right)'}{\left(\frac{1}{\varsigma} \right)'} d\varphi \quad (3.78) \\ &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\beta} \frac{\partial H_y^>}{\partial \mathbf{n}} \varsigma d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Der zweite Summand des Integrals in Gleichung 3.65 ergibt unter Berücksichtigung der Gleichung 3.76 folgenden Grenzwert.

$$\begin{aligned} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} -H_y^> \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{2\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\Gamma &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma' - \Gamma_\varsigma} -H_y^> \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{2\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\Gamma \\ &+ \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varsigma} -H_y^> \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{2\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.79)$$

Der erste Integralterm auf der rechten Seite liefert im Grenzübergang den Cauchysche Hauptwert eines stark singulären Integrals. Das zweite Integral der rechten Seite liefert mit

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} = -\varsigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\varsigma \quad (3.80)$$

folgenden Beitrag zum Grenzwert.

$$\begin{aligned} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varsigma} -H_y^> \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{2\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\Gamma &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\varphi=0}^{\beta} H_y^> \frac{\varsigma}{2\pi \varsigma^2} \varsigma d\varphi \\ &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{\varphi=0}^{\beta} H_y^> \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{\beta H_y^>(\boldsymbol{\xi})}{2\pi} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Fasst man die Ergebnisse der Grenzwertbetrachtung durch Einsetzen der Grenzwerte in Gleichung 3.65 zusammen ergibt sich eine Randintegralgleichung.

$$H_y^>(\boldsymbol{\xi}) = H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\beta H_y^>(\boldsymbol{\xi})}{2\pi} - \oint_{\Gamma} H_y^>(\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{2\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\ln\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{2\pi} \frac{\partial H_y^>(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (3.82)$$

Dieses Ergebnis stellt in seiner verallgemeinerten Form die gesuchte Randintegralgleichung

$$\left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) H_y^>(\boldsymbol{\xi}) = H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + \oint_{\Gamma} H_y^>(\mathbf{x}) \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial H_y^>(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (3.83)$$

dar. Der Faktor $(1 - \beta/2\pi) = a(\boldsymbol{\xi})$ wird als Randfaktor bezeichnet. Für ihn gelten unterschiedliche Werte je nach Berechnungsort. Man unterscheidet Werte auf dem Rand, im betrachteten Gebiet und in Gebieten außerhalb des betrachteten Bereichs.

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 - \frac{\beta}{2\pi} & \text{für } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma \\ 1 & \text{für } \boldsymbol{\xi} \notin \Gamma, \in \Omega \\ 0 & \text{für } \boldsymbol{\xi} \notin \Gamma, \notin \Omega \end{cases} \quad (3.84)$$

Die Randintegralgleichung für das Feld unterhalb der Mediengrenze ergibt sich dementsprechend basierend auf der Gleichung 3.66 zu

$$\left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) H_y^<(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma} H_y^<(\mathbf{x}) \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial H_y^<(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma . \quad (3.85)$$

3.7 Diskretisierung des Randes

Die Diskretisierung des Randes ist notwendig, da die Auswertung der Integrale in den Gleichungen 3.83 und 3.85 nur selten analytisch möglich ist. Der Rand wird dann für die Integration stückweise durch stetige Funktionen angenähert. In dieser Arbeit erfolgt die Annäherung durch Geraden mit der Länge ΔL . Die Geometrie des Randes wird dabei durch N Randelemente abgebildet. Unter der Voraussetzung, dass die gesuchten Randwerte $H_{y_{rn}}$ und $\partial H_{y_{rn}}/\partial \mathbf{n}$ jeweils über ein Randelement konstant sind, wird eine konstante Formfunktion genutzt. Bei der konstanten Formfunktion ist jedes Randelement mit einem Knoten versehen. Aufgrund der angenommenen Konstanz der Randwerte entsprechen die gesuchten Randwerte dem jeweiligen Wert im Knotenpunkt. Durch die Diskretisierung ergibt sich nach Gaul [15] für die Gleichung 3.83 der folgende diskretisierte Ausdruck.

$$a(\boldsymbol{\xi}) H_y^>(\boldsymbol{\xi}) = H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{n=1}^N \left(H_{y_n}^> \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \frac{\partial H_{y_n}^>}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) \quad (3.86)$$

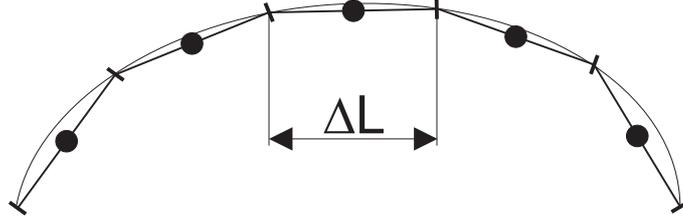


Abb. 3.5 Diskretisierung des Randes

Entsprechend liefert die Diskretisierung des Randes für die Gleichung 3.85

$$a(\boldsymbol{\xi}) H_y^<(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^N \left(-H_{yn}^< \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \frac{\partial H_{yn}^<}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right). \quad (3.87)$$

Die Knotenpunkte liegen jeweils in der Mitte eines jeden Geradenelements. Gemäß der Abbildung 3.4 ergibt sich somit für den Kreissektorwinkel β ein Wert von $\beta = \pi$. Für den Randfaktor $a(\boldsymbol{\xi})$ folgt daher

$$a(\boldsymbol{\xi}) = 1 - \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (3.88)$$

Es sind auch andere Formfunktionen möglich. Da sich die Werte der Greenschen Funktion entlang eines Randelements jedoch nur sehr gering ändern, ist die Wahl der konstanten Formfunktion sinnvoll. Weitere Formfunktionen und Details zur Diskretisierung werden bei Gaul [15] und Brebbia [7] vorgestellt.

3.8 Integration der Randintegralgleichungen

Bei der Integration der Randintegralgleichungen werden im Rahmen dieser Arbeit einige Vereinfachungen genutzt, um den numerischen Aufwand zu reduzieren. Es sind die Fälle zu unterscheiden, bei denen Ladepunkt und Feldpunkt auf einem Randelement oder auf unterschiedlichen Randelementen liegen.

Wenn Ladepunkt und Feldpunkt nicht auf dem gleichen Element liegen, können die Randintegrale direkt berechnet werden. Unter der Annahme der Konstanz der Greenschen Funktion über ein Randelement hinweg lassen sich die Integrale der Nichtdiagonalelemente der Gleichungsmatrix durch Multiplikation des jeweiligen Knotenwertes mit der Randelementlänge berechnen. Für die jeweiligen Randintegrale ergeben sich folgende Berechnungsgleichungen.

$$\int_{\Gamma_n} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma = \Delta L \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) = \Delta L \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \right) \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma &= -\Delta L \frac{i}{4} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \\ &= -\Delta L \frac{i}{4} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \right) \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\int_{\Gamma_n} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma = \Delta L \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\bar{n}\omega}{c} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \right) \quad (3.91)$$

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\Delta L \frac{i}{4} \frac{\bar{n}\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\bar{n}\omega}{c} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \right) \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \quad (3.92)$$

Befinden sich Ladepunkt und Feldpunkt auf dem gleichen Element müssen auftretende Singularitäten beachtet werden. Bei der 2D-Randelementenmethode ergeben sich zwei Arten von singulären Integralen. Man unterscheidet schwach singuläre und stark singuläre Integrale. Eine kurze Übersicht über die Arten der Singularitäten wird in Tabelle 3.2 gegeben. Ein stark singulärer Integrand ergibt sich bei der 2D-REM in der Form $f(r) = 1/r$. Er tritt bei der Integration der Normalenableitung der Greenschen Funktion auf, da für kleine Werte von r der Zusammenhang nach Gleichung 3.76 gilt. Eine Möglichkeit, ein Integral über die Singularitätsstelle hinweg zu definieren, ist

$$\begin{aligned} \oint_{-a}^b \frac{1}{r} dr &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varsigma} \frac{1}{r} dr + \int_{\varsigma}^b \frac{1}{r} dr \right) \\ &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} (\ln |-\varsigma| - \ln |-a| + \ln b - \ln \varsigma) \\ &= \ln b - \ln a . \end{aligned} \quad (3.93)$$

Diese Definition eines stark singulären Integrals wird als Cauchy Hauptwert des Integrals bezeichnet. Die Cauchy Hauptwerte der Integrale bei der REM sind nach Gaul [15] immer endlich, da alle Integranden die Symmetrieeigenschaft

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} f(r_s + \varsigma) = -\lim_{\varsigma \rightarrow 0} f(r_s - \varsigma) \quad (3.94)$$

Tabelle 3.2 Arten von Singularitäten bei der 2D-REM

Art	Eigenschaft	Erscheinungsform
schwache Singularität	Endliche Stammfunktion an der Singularitätsstelle	$\ln r$
starke Singularität	Das Integral lässt sich als Cauchy-Hauptwert interpretieren	$\frac{1}{r}$

um die Singularitätsstelle r_s aufweisen und sich somit die unendlichen Anteile im Cauchy Hauptwert zu Null addieren.

Berücksichtigt man, dass der Vektor $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ senkrecht zur Oberflächennormalen \mathbf{n} steht, wenn der Ladepunkt und der Feldpunkt auf dem gleichen Element liegen, folgt für das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (3.95)$$

Dies ermöglicht eine wesentliche Vereinfachung bei der Berechnung der Hauptdiagonalelemente der Lösungsmatrix. Eine Integrationsberechnung mit Berücksichtigung der starken Singularitäten entfällt, da die stark singulären Integranden in den Gleichungen 3.86 und 3.87 den Term gemäß Gleichung 3.95 multiplikativ enthalten und sich somit zu Null ergeben. Dies gilt auch für den Grenzwert, da die Hankelsche Funktion gegen Unendlich strebt, das Skalarprodukt jedoch eine echte Null darstellt. Die Randintegrale über die Normalenableitungen der Greenschen Funktionen ergeben sich auf den singulären Randelementen somit zu

$$\int_{-\Delta L/2}^{\Delta L/2} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} dr = 0 . \quad (3.96)$$

Eine schwach singuläre Funktion besitzt eine Unendlichkeitsstelle, an der ihre Stammfunktion stetig ist. Die Funktion $f(r) = \ln r$ ist die zu berücksichtigende schwache Singularität der 2D-REM. Sie tritt auf bei der Integration der Greenschen Funktion über das Randelement, auf dem Ladepunkt und Feldpunkt zusammentreffen, da für kleine Werte von r für die Greensche Funktion die Beziehung gemäß Gleichung 3.72 gilt. Die Lösung des Integrals erfolgt über die Bildung des Cauchy Hauptwerts gemäß der Definition in Gleichung 3.93. Für das Feld oberhalb der Mediengrenze ergibt sich das singuläre Integral zu

$$\int_{-\Delta L/2}^{\Delta L/2} -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\omega r}{c}\right) dr = -\frac{\Delta L}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{\omega \Delta L}{2c}\right) + \ln\left(-\frac{\omega \Delta L}{2c}\right) - 2 \right) . \quad (3.97)$$

Für die Lösung des singulären Integrals der Greenschen Funktion im Material folgt

$$\int_{-\Delta L/2}^{\Delta L/2} -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\bar{n}\omega r}{c}\right) dr = -\frac{\Delta L}{4\pi} \left(\ln\left(\frac{\bar{n}\omega \Delta L}{2c}\right) + \ln\left(-\frac{\bar{n}\omega \Delta L}{2c}\right) - 2 \right) . \quad (3.98)$$

3.9 Die Definition der einfallenden Strahlung

Zur Berechnung eines Streufeldes ist ein einfallendes Strahlungsfeld zu definieren. In vielen Arbeiten wird das einfallende Feld durch eine ebene Welle dargestellt. Dies führt,

aufgrund der unendlichen Ausdehnung einer ebenen Welle, zu der Notwendigkeit einer periodischen Replizierung der untersuchten Oberfläche, um verfälschende Randeffekte ausschließen zu können. Eine periodische Randbedingung wäre im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur schwer umzusetzen gewesen. Die Randelementenmethode ist hierfür nicht besonders geeignet, da die Berechnungen auf direkt abgegrenzten Gebieten basieren. Zur Vermeidung verfälschender Randeffekte wird daher das einfallende Feld durch eine ebene Welle gegeben, deren Amplitude eine Gaußsche Verteilung um den Einfallswinkel ϑ_0 aufweist. Diese Verteilung sorgt für sehr kleine Feldwerte des einfallenden Feldes an den Rändern der betrachteten Oberfläche. Der Einfluss der Ränder auf die Berechnung des Streufeldes wird somit eliminiert.

Ein einfallendes Feld mit diesen Eigenschaften ergibt sich gemäß Maradudin [42] aus der Überlagerung einer unendlichen Anzahl eingehender Wellen zu

$$H_y^{ein}(\mathbf{x}) = \frac{\omega b}{2\sqrt{\pi}c} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-(\omega^2 b^2/4c^2)(\vartheta-\vartheta_0)^2} e^{i(\omega/c)(x \sin \vartheta - z \cos \vartheta)} d\vartheta . \quad (3.99)$$

Die Betrachtung von zeitharmonischen Vorgängen erlaubt die Vernachlässigung des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ bei der Beschreibung des einfallenden Feldes. Mit der Substitution $\vartheta - \vartheta_0 = \phi$ folgt

$$H_y^{ein}(\mathbf{x}) = \frac{\omega b}{2\sqrt{\pi}c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega^2 b^2/4c^2)\phi^2} e^{i(\omega/c)(x \sin(\vartheta_0+\phi) - z \cos(\vartheta_0+\phi))} d\phi . \quad (3.100)$$

Für die Reihen der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus gilt dabei für die

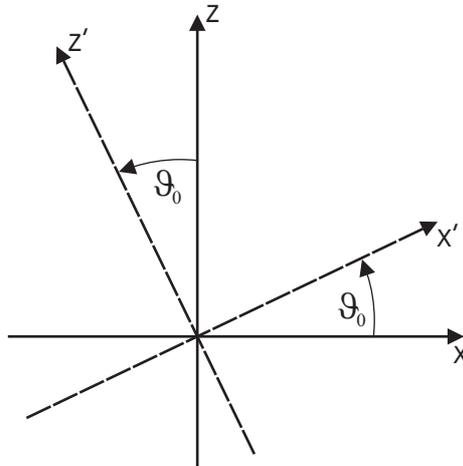


Abb. 3.6 Geometrie des einfallenden Feldes

Entwicklung bis zum quadratischen Term nach Stöcker [55]

$$\sin(\vartheta_0 + \phi) = \sin \vartheta_0 + \phi \cos \vartheta_0 - \frac{\phi^2 \sin \vartheta_0}{2} \quad (3.101)$$

$$\cos(\vartheta_0 + \phi) = \cos \vartheta_0 - \phi \sin \vartheta_0 - \frac{\phi^2 \cos \vartheta_0}{2}. \quad (3.102)$$

Die Gleichung für das einfallende Feld ergibt sich mit diesen Reihenentwicklungen zu

$$H_y^{ein}(\mathbf{x}) = \frac{\omega b}{2\sqrt{\pi}c} e^{-i(\omega/c)z'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-((\omega^2 b^2/4c^2) - (i(\omega z'/2c))) \phi^2} e^{i(\omega x'/c)\phi} d\phi. \quad (3.103)$$

Für die gedrehten Koordinaten x' und z' gilt gemäß der in Abbildung 3.6 dargestellten Geometrie

$$x' = x \cos \vartheta_0 + z \sin \vartheta_0 \quad (3.104)$$

$$z' = -x \sin \vartheta_0 + z \cos \vartheta_0. \quad (3.105)$$

Die Berechnung des Integrals in Gleichung 3.103 liefert die folgende Gleichung zur Beschreibung des einfallenden Feldes in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ϑ_0 .

$$H_y^{ein}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-i(\omega/c)z'} e^{-(x'^2/b^2)(1-2icz'/\omega^2 b)}}{(1 - (2icz')/(\omega^2 b))^{1/2}} \quad (3.106)$$

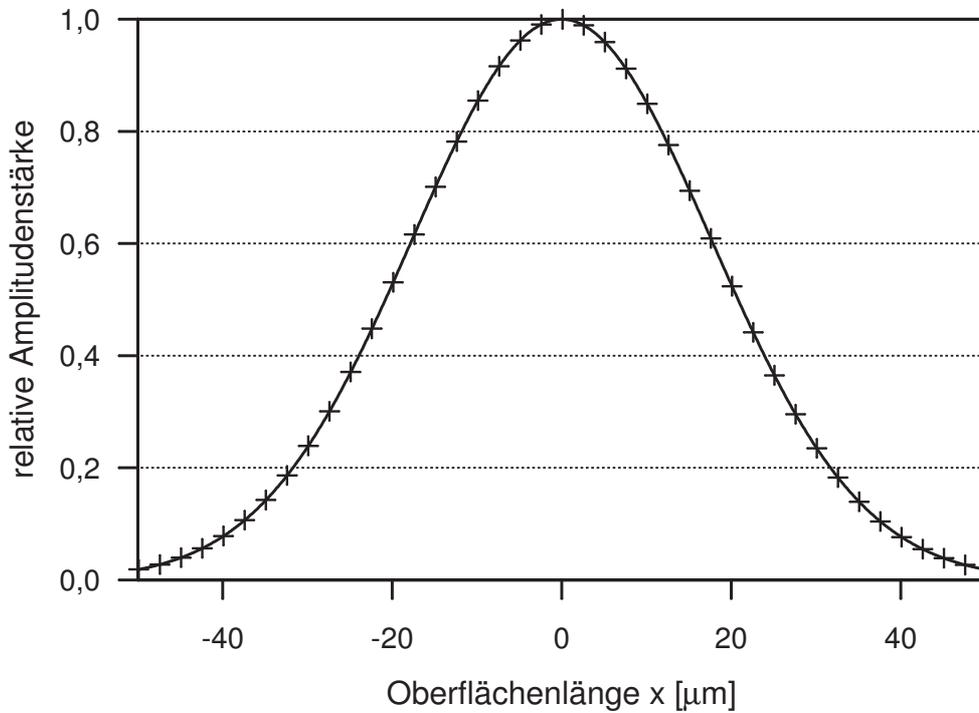


Abb. 3.7 Normalverteilung der Amplitudenstärke des einfallenden Feldes bei senkrechtem Einfall für $z' = 0$

Eine gute Näherung für diese Lösung ist gemäß Maradudin [42]

$$H_y^{ein}(\mathbf{x}) \cong e^{-i(\omega/c)z'[1+(c^2/\omega^2b^2)(2(x'^2/b^2)-1)]} e^{-(x'^2/b^2)}. \quad (3.107)$$

Mit dem Term $e^{-(x'^2/b^2)}$ ist deutlich die Normalverteilung der Feldenergie in x-Richtung für $z' = 0$ zu erkennen. Die Verteilung der Amplitudenstärke für $z' = 0$ gemäß Gleichung 3.106 wird in Abbildung 3.7 als durchgezogene Linie dargestellt. Die Kreuze in der Abbildung kennzeichnen Werte, die mit der Näherungsgleichung ermittelt wurden. Es ist deutlich die Normalverteilung gemäß des Terms $e^{-(x'^2/b^2)}$ und die gute Qualität der Näherungsgleichung für den senkrechten Einfall zu erkennen. Die Varianz der Normalverteilung entspricht demnach der Größe b .

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Breite der Normalverteilung b in Abhängigkeit von der gesamten Oberflächenausdehnung in x-Richtung $l_{x,ges}$ und des Einfallswinkels ϑ_0 bestimmt. Die Varianz und somit die Breite der Normalverteilung b ergibt sich dementsprechend aus

$$b = \frac{l_{x,ges}}{4} \cos \vartheta_0. \quad (3.108)$$

Es ist dabei zu beachten das die betrachtete Oberfläche mindestens eine Ausdehnung von 10λ in x-Richtung hat. Ansonsten stellt sich keine ausreichend abgeschwächte Normalverteilung ein.

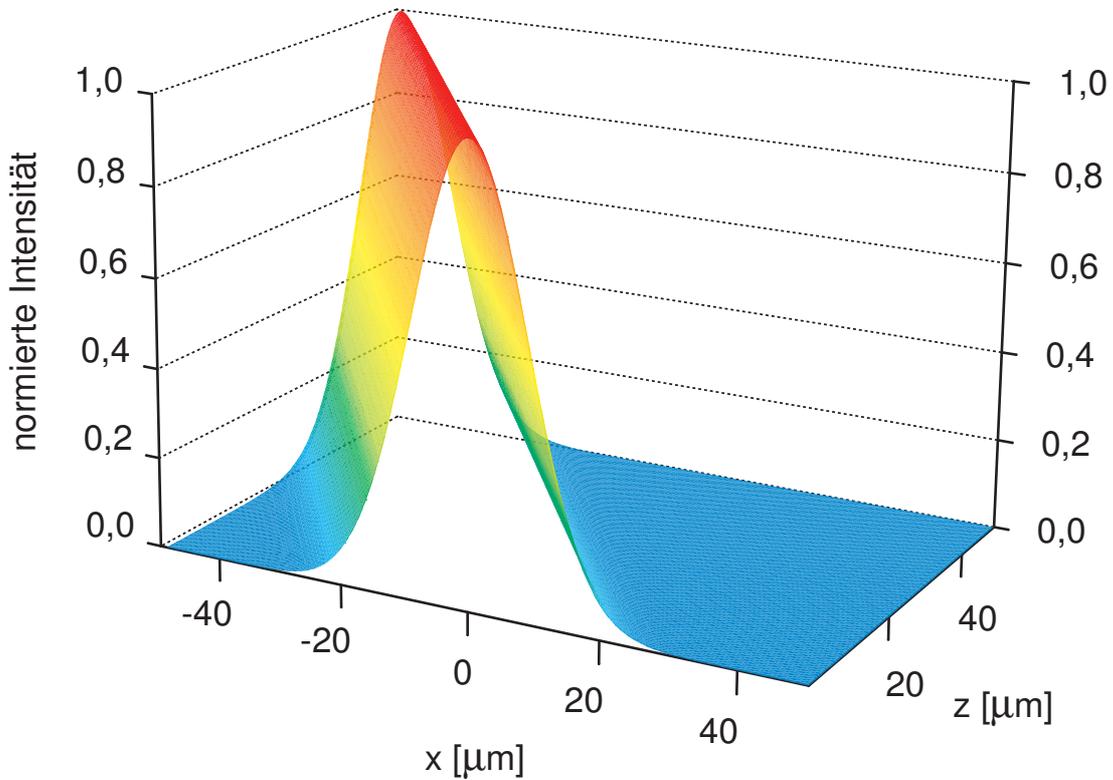


Abb. 3.8 Normierte Intensität einer unter $\vartheta_0 = 45^\circ$ einfallenden Welle

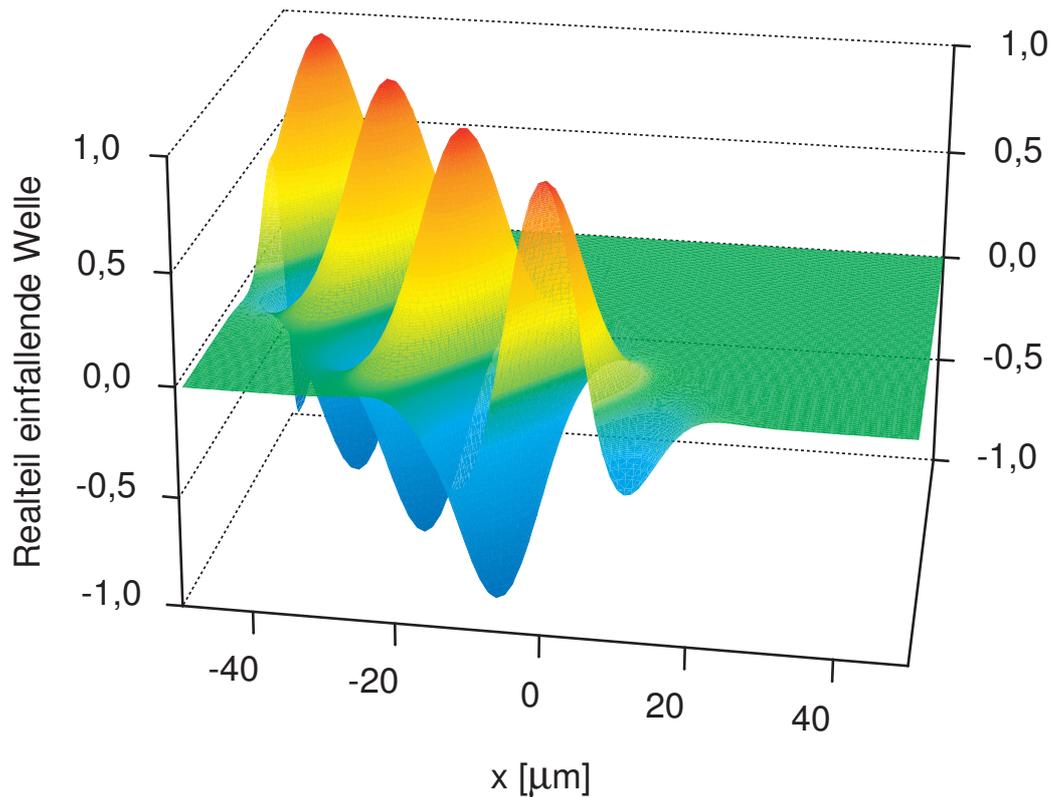


Abb. 3.9 Realtteil der einfallenden Welle

Die Möglichkeit, das einfallende Feld unter unterschiedlichen Winkeln einfallen zu lassen, ermöglicht die Berechnung von Randwerten und des gestreuten Feldes für unterschiedliche Einfallswinkel. Die Werte des einfallenden Feldes bilden alleinig die rechte Seite des Gleichungssystems 3.113 zur Berechnung der unbekannt Randwerte, wie es in Abschnitt 3.10 beschrieben wird. Da kein Einfluss auf die linke Seite besteht, ist es möglich die rechte Seite des Gleichungssystems mit mehreren Vektoren für die verschiedenen einfallenden Felder zu füllen. Der zeitaufwendigste Schritt der LU-Zerlegung bei der Lösung des Gleichungssystems muss dann für beliebig viele Einfallswinkel nur einmal vorgenommen werden.

Zur Veranschaulichung des verwendeten einfallenden Feldes ist in Abbildung 3.8 die normierte Intensität eines unter $\vartheta_0 = 45^\circ$ einfallenden Feldes dargestellt. Es ist deutlich die Normalverteilung der Intensität um die Einfallsrichtung zu erkennen. Eine weitere Verdeutlichung der Einfallscharakteristik und Visualisierung der einfallenden Welle wird durch die Darstellung des Realtteils der einfallenden Welle in der Abbildung 3.9 ermöglicht. Es ist die Ausbreitung der Welle in Richtung des Einfallswinkels zu erkennen und auch die Intensitätsverteilung wird noch einmal deutlich. Darüber hinaus wird die Periodizität der Welle durch diese Darstellung sichtbar.

3.10 Berechnung der Randwerte

Zur Berechnung der unbekanntnen Randwerte wird zuerst unter Berücksichtigung der Randbedingungen 3.32 und 3.33 aus den Gleichungen 3.86 und 3.87 ein Paar gekoppelter, inhomogener Integralgleichungen aufgestellt.

$$H_{yr}(\boldsymbol{\xi}) = 2 H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + 2 \sum_{n=1}^N \left(H_{y_{rn}} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \frac{\partial H_{y_{rn}}}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) \quad (3.109)$$

$$H_{yr}(\boldsymbol{\xi}) = 2 \sum_{n=1}^N \left(-H_{y_{rn}} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \bar{\varepsilon} \frac{\partial H_{y_{rn}}}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) \quad (3.110)$$

Hierbei wurde berücksichtigt das sich der Randfaktor gemäß der Beziehung 3.88 zu $a(\boldsymbol{\xi}) = 1/2$ ergibt. Die Berechnung der unbekanntnen Randwerte erfolgt durch Anwendung der Kollokationsmethode auf die gekoppelten Gleichungen 3.109 und 3.110. Es wird ein Gleichungssystem aufgebaut das genauso viele Unbekannte wie Gleichungen enthält. Dieses Gleichungssystem wird in dieser Arbeit aufgestellt, indem der Ladepunkt $\boldsymbol{\xi}$ der Reihe nach auf alle Knoten gelegt wird. Hierdurch wird eine Identifizierung des Wertes der Feldgröße am Ladepunkt mit dem entsprechenden Knotenwert möglich. Wenn der Ladepunkt auf den ersten Knoten gelegt wird, ergibt sich die erste Gleichung für das Gebiet oberhalb der Mediengrenze zu

$$\begin{aligned} & H_{yr1} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} 2 \frac{\partial G^>(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - 1 \right)}_{P_{11}^>} + \dots + H_{yrN} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 \frac{\partial G^>(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma}_{P_{1N}^>} \\ & - \frac{\partial H_{yr1}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_1} 2 G^>(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{Q_{11}^>} - \dots - \frac{\partial H_{yrN}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 G^>(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{Q_{1N}^>}}_{H_N^{norm}} = \underbrace{- 2 H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}_1)}_{H^{ein}} . \end{aligned} \quad (3.111)$$

Für die erste Gleichung unterhalb der Mediengrenze folgt bei gleicher Vorgehensweise

$$\begin{aligned} & H_{yr1} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} 2 \frac{\partial G^<(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + 1 \right)}_{P_{11}^<} + \dots + H_{yrN} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 \frac{\partial G^<(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma}_{P_{1N}^<} \\ & - \frac{\partial H_{yr1}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_1} 2 \bar{\varepsilon} G^<(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{Q_{11}^<} - \dots - \frac{\partial H_{yrN}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 \bar{\varepsilon} G^<(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{Q_{1N}^<} = 0 . \end{aligned} \quad (3.112)$$

Wird der Ladepunkt auf die weiteren Knoten gelegt, ergeben sich die entsprechenden Gleichungen. In Matrixschreibweise ergibt sich ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{bmatrix} P_{11}^> & P_{12}^> & \dots & P_{1N}^> & -Q_{11}^> & -Q_{12}^> & \dots & -Q_{1N}^> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}^> & P_{N2}^> & \dots & P_{NN}^> & -Q_{N1}^> & -Q_{N2}^> & \dots & -Q_{NN}^> \\ P_{11}^< & P_{12}^< & \dots & P_{1N}^< & -Q_{11}^< & -Q_{12}^< & \dots & -Q_{1N}^< \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}^< & P_{N2}^< & \dots & P_{NN}^< & -Q_{N1}^< & -Q_{N2}^< & \dots & -Q_{NN}^< \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \\ H_1^{norm} \\ \vdots \\ H_N^{norm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{ein} \\ \vdots \\ H_N^{ein} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Eine Zusammenfassung der einzelnen Terme in Untermatrizen ermöglicht folgende einfachere Darstellung.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^> & -\mathbf{Q}^> \\ \mathbf{P}^< & -\mathbf{Q}^< \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^{norm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ein} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Das Gleichungssystem besteht aus $2N$ Gleichungen zur Berechnung der N unbekannt Knotenwerte von \mathbf{H} und der N unbekannt Knotenwerte von \mathbf{H}^{norm} . Das Befüllen der Untermatrizen $\mathbf{P}^>$, $\mathbf{Q}^>$, $\mathbf{P}^<$ und $\mathbf{Q}^<$ erfolgt durch die Integration der Randintegrale über das jeweilige Element, wie sie im Abschnitt 3.8 beschrieben ist. Dieses Gleichungssystem kann nun gelöst werden, um die unbekannt Randwerte \mathbf{H} und \mathbf{H}^{norm} zu berechnen. Das Vorgehen und die Probleme bei der Lösung des Gleichungssystem werden im Abschnitt 3.14 ausführlich erläutert. Mit Kenntnis der berechneten Randwerte lassen sich nun die Feldwerte des magnetischen Feldes H_y für jede Ortskoordinate in den betrachteten Gebieten berechnen.

3.11 Berechnung der Feldwerte

Das Gesamtfeld oberhalb der Mediengrenze im Vakuum setzt sich aus dem einfallenden Feld und dem gestreuten Feld zusammen.

$$H_y^>(\boldsymbol{\xi}) = H_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + H_y^{ost}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.114)$$

Unter Berücksichtigung dieser Zusammensetzung lassen sich die Feldwerte des gestreuten Feldes oberhalb der Mediengrenze basierend auf der Gleichung 3.86 berechnen zu

$$H_y^{ost}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^N \left(H_{y_{rn}} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \frac{\partial H_{y_{rn}}}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) . \quad (3.115)$$

Die Feldwerte des gestreuten Feldes unterhalb der Mediengrenze im dielektrischen Material ergeben sich analog gemäß Gleichung 3.87 zu

$$H_y^{ust}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^N \left(-H_{y_{rn}} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \bar{\varepsilon} \frac{\partial H_{y_{rn}}}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) . \quad (3.116)$$

3.12 Berechnung der einfallenden und gestreuten Energien

Die Berechnung der einfallenden und gestreuten Energie basiert auf den Erkenntnissen aus der Betrachtung des Poyntingschen Satzes in Abschnitt 2.3.2. Er stellt die Energiebilanz für elektromagnetische Wellen dar. Die Flussdichte der Energie einer elektromagnetischen Welle wird durch den Poynting Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ repräsentiert. Das Oberflächenintegral des Poynting Vektors über eine Durchtrittsfläche A ergibt, wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben, die über die Systemgrenze strömende Energie

$$\Phi = \int_A \mathbf{S} \, dA . \quad (3.117)$$

Zur Berechnung dieses Integrals wird zuerst der Poynting Vektor \mathbf{S} berechnet. Ausgangspunkt für die Ermittlung des Poynting Vektors stellt die folgende Darstellung der magnetischen Welle des p-polarisierten Falls dar.

$$\mathbf{H} = H_y e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\mathbf{r}\mathbf{s} - ct)} \quad (3.118)$$

Der Vektor \mathbf{s} ist der in Abbildung 3.10 dargestellte Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung und der Vektor \mathbf{r} gibt die Ortskoordinaten eines beliebigen Punktes des Wellenfeldes an. Die komplexe Amplitude H_y fasst formal den Betrag der Amplitude und die Phase der Welle zusammen.

Da mit der REM nur Werte des magnetischen Feldes \mathbf{H} berechnet werden und nur diese zur Berechnung des Poyntingschen Vektors zur Verfügung stehen, muss ein Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und dem magnetischen Feld dieser ebenen Welle hergestellt werden. Die elektrische Feldstärke einer ebenen Welle lässt sich unter Berücksichtigung der Maxwell'schen Gleichungen aus der magnetischen Feldstärke berechnen. Mit der Rechenregel

$$\text{rot}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \, \text{rot} \, \mathbf{b} + \text{grad} \, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (3.119)$$

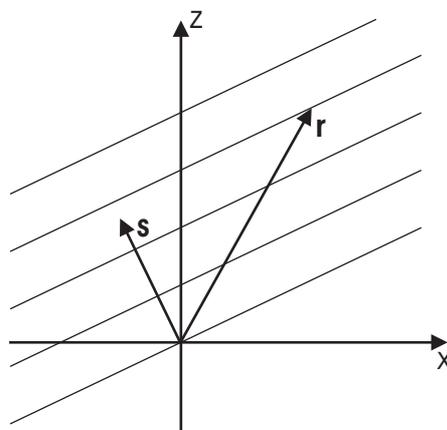


Abb. 3.10 Geometrie der ebenen Welle

findet man für die Rotation des Magnetfeldes den Ausdruck

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\mathbf{rs}-ct)} \operatorname{rot} H_y + \left(\operatorname{grad} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\mathbf{rs}-ct)} \right) \times H_y . \quad (3.120)$$

Die Rotation der komplexen Amplitude ergibt sich dabei zu $\operatorname{rot} H_y = 0$. Mit dieser Erkenntnis und nach der Berechnung des Gradienten folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathbf{s} \times \mathbf{H}) . \quad (3.121)$$

Für die hier betrachteten ebenen Wellen gilt gemäß der 1. Maxwellschen Gleichung 2.47

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \quad (3.122)$$

da die elektrische Stromdichte $\mathbf{J} = 0$ ist. Das Einsetzen der Materialbeziehung 2.51 und die Integration der Gleichung 3.122 nach der Zeit ergibt bei periodischen Wellen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \int \operatorname{rot} \mathbf{H} dt = -\frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 c} (\mathbf{s} \times \mathbf{H}) . \quad (3.123)$$

Mit der Beziehung zwischen Permeabilitätskonstanten, Dielektrizitätskonstanten und Lichtgeschwindigkeit folgt für den Zusammenhang zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld einer p-polarisierten, ebenen Welle

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} (\mathbf{s} \times \mathbf{H}) . \quad (3.124)$$

Für den Poyntingvektor ergibt sich somit die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} [(\mathbf{s} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] . \quad (3.125)$$

Mit dem Entwicklungssatz für doppelte Vektorprodukte gemäß Stöcker [55]

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (3.126)$$

folgt für Gleichung 3.125

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \mathbf{H}^2 \mathbf{s} . \quad (3.127)$$

Es wird dabei berücksichtigt das \mathbf{H} und \mathbf{s} senkrecht aufeinander stehen und somit $\mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = 0$ gilt. Im Folgenden ist zu beachten das der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Feldstärke nur getrennt voneinander physikalisch sinnvoll sind. Da die Wirkleistung des Feldes betrachtet wird ist es notwendig, nur die Realteile der komplexen Feldstärke für die weiteren Berechnungen zu nutzen. Zur Abbildung des physikalisch

sinnvollen Vorgangs, der durch das Produkt der Realteile der Faktoren beschrieben wird, ersetzt man \mathbf{H}^2 durch den Ausdruck

$$\mathbf{H}^2 = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \right]^2 . \quad (3.128)$$

Dies führt zur Ausklammerung der Imaginärteile, da bei der Addition einer komplexen Zahl und ihrer konjugiert komplexen Zahl sich der doppelte Realteil ergibt.

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}^* = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{H}) . \quad (3.129)$$

Der Poynting Vektor ergibt sich damit abschließend zu

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)^2 \mathbf{s} . \quad (3.130)$$

Die Energiestromdichte der ebenen Welle schwankt aufgrund der Periodizität der Feldstärke zeitlich und räumlich. Im Rahmen der Berechnungen dieser Arbeit wird jedoch ein Mittelwert über mehrere Perioden benötigt. Dieser Mittelwert kann aus

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \left(H_y^2 e^{\frac{4\pi i}{\lambda}(\mathbf{rs}-ct)} + H_y^{*2} e^{-\frac{4\pi i}{\lambda}(\mathbf{rs}-ct)} + 2 H_y H_y^* \right) \mathbf{s} . \quad (3.131)$$

gewonnen werden. Aufgrund der Periodizität der Funktionen in den ersten beiden Summanden verschwindet deren Mittelwert über die Perioden. Es bleibt nur der zeitlich konstante dritte Summand erhalten. Der Betrag dieses Zeitmittelwerts gibt die Energieintensität der Welle wieder. Die Intensität des einfallenden Feldes an einem Ort \mathbf{x} oberhalb der Trenngrenze ergibt sich somit zu

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle|^{ein} = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} H_y^{ein}(\mathbf{x}) H_y^{ein*}(\mathbf{x}) . \quad (3.132)$$

Für die Intensitäten des gestreuten Feldes oberhalb und unterhalb der Trenngrenze ergeben sich folgende analoge Gleichungen

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle|^{ost} = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} H_y^{ost}(\mathbf{x}) H_y^{ost*}(\mathbf{x}) \quad (3.133)$$

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle|^{ust} = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} H_y^{ust}(\mathbf{x}) H_y^{ust*}(\mathbf{x}) . \quad (3.134)$$

Zur Bestimmung der einfallenden und gestreuten Energien wird nun das Oberflächenintegral über den Poynting Vektor aus Gleichung 3.117 berechnet. Dieses Oberflächenintegral über die Energiestromdichte ermittelt den durch die frei wählbare Oberfläche tretenden Energiestrom. Für den 2D-Fall reduziert sich die betrachtete Durchtrittsoberfläche zu einem Durchtrittsrand. Die einfallende Energie für den p-polarisierten Fall ergibt sich demnach aus dem folgenden Integral.

$$\Phi_{e||}(\lambda, \vartheta_0) = \int_A \mathbf{S} \, dA = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} \int_{\Gamma} H_y^{ein}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ein*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.135)$$

Die Berechnung der in den Halbraum oberhalb der Mediengrenze reflektierten Energie für den p-polarisierten Fall erfolgt analog.

$$\Phi_{r||}(\lambda, \vartheta_0) = \int_A \mathbf{S} \, dA = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} \int_{\Gamma} H_y^{ost}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ost*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.136)$$

Die transmittierte Energie unterhalb der Mediengrenze ergibt sich im p-polarisierten Fall entsprechend zu

$$\Phi_{t||}(\lambda, \vartheta_0) = \int_A \mathbf{S} \, dA = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} \int_{\Gamma} H_y^{ust}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ust*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma . \quad (3.137)$$

Die Systemgrenze, über die die berechneten Energien fließen, ist jeweils ein Halbkreis mit dem Radius $r = l_{x,ges}$. Für die einfallende und reflektierte Energie wird er oberhalb der Mediengrenze gezogen. Bei der Berechnung der transmittierten Energie wird er unterhalb der Mediengrenz aufgespannt. Die auf diese Weise für eine Wellenlänge ermittelten Energien ermöglichen die Bestimmung des gerichtet hemisphärischen spektralen Reflektionsgrads. Der sich somit gemäß Gleichung 2.31 für den p-polarisierten Fall ergibt zu

$$\varrho'_{\lambda||}(\lambda, \vartheta_0) = \frac{\Phi_{r||}(\lambda, \vartheta_0)}{\Phi_{e||}(\lambda, \vartheta_0)} = \frac{\int_{\Gamma} H_y^{ost}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ost*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}{\int_{\Gamma} H_y^{ein}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ein*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma} . \quad (3.138)$$

Bei der Berechnung des Transmissionsgrades ist zu beachten, das die Ausbreitungsgeschwindigkeit c durch folgenden Ausdruck repräsentiert wird

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} \quad (3.139)$$

und somit von den Materialeigenschaften abhängig ist. Bei der Berechnung des Reflektionsgrades sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des reflektierten und des einfallenden Feldes identisch und können somit gegeneinander gekürzt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des transmittierten Feldes im dielektrischen Material unterscheidet sich jedoch um den Faktor $1/\sqrt{\varepsilon_r}$ von der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum. Bei der Division der Geschwindigkeiten bleibt der Faktor erhalten . Demnach gilt für den Transmissionsgrad im p-polariserten Fall

$$\tau'_{\lambda||}(\lambda, \vartheta_0) = \frac{\Phi_{t||}(\lambda, \vartheta_0)}{\Phi_{e||}(\lambda, \vartheta_0)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\int_{\Gamma} H_y^{ust}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ust*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}{\int_{\Gamma} H_y^{ein}(\mathbf{x}, \vartheta_0) H_y^{ein*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma} . \quad (3.140)$$

Die Kenntnis des gerichtet hemisphärischen spektralen Reflektionsgrads und des entsprechenden Transmissionsgrads ermöglicht die Berechnung des gerichteten spektralen Emissionsgrads für die p-polarisierte Betrachtung. Basierend auf den in Abschnitt 2.2.5 vorgestellten Zusammenhängen zwischen den optischen Eigenschaften folgt für den gerichteten spektralen Emissionsgrad

$$\varepsilon'_{\lambda||}(\lambda, \vartheta_0) = 1 - \rho'_{\lambda||}(\lambda, \vartheta_0) - \tau'_{\lambda||}(\lambda, \vartheta_0). \quad (3.141)$$

Für den p-polarisierten Fall ist damit die Berechnung abgeschlossen. Zur Berechnung des unpolarisierten Falls wird jedoch zunächst die Lösung für den s-polarisierten Fall benötigt. Durch Mittelung der Resultate für den p- und den s-polarisierten Fall lassen sich dann, wie zum Abschluss von Abschnitt 3.13 beschrieben, die optischen Eigenschaften für den unpolarisierten Fall bestimmen.

3.13 Die senkrecht polarisierte Welle

In diesem Abschnitt werden die für das magnetische Feld der p-polarisierten Welle formulierten Gleichungen für das elektrische Feld der s-polarisierten Welle angepasst. Die s-polarisierte Welle wird dabei durch folgende Felder beschrieben.

$$\mathbf{H} = (H_x, 0, H_y) e^{i\omega t} \quad (3.142)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0) e^{i\omega t} \quad (3.143)$$

E_y stellt demnach die komplexe Amplitude des elektrischen Feldes der s-polarisierten Welle dar. Die Berechnung der Werte dieser komplexen Amplitude ist für die Berechnung der Energien der einfallenden und gestreuten Felder ausreichend. Hierzu werden zuerst die Differentialgleichungen des elektrischen Feldes aufgestellt. Die für die REM benötigten Differentialgleichungen für das Feld oberhalb und unterhalb der Trenngrenze ergeben sich analog zum Abschnitt 3.3 zu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_y^> = 0 \quad (3.144)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{\varepsilon} \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_y^< = 0. \quad (3.145)$$

Die zur Lösung der Differentialgleichungen benötigten Rand- und Übergangsbedingungen für die Trennfläche zwischen Vakuum und Material werden entsprechend zu den Bedingungen in Abschnitt 3.4 aufgestellt. Die Gleichheit der Feldwerte auf dem Rand ist die erste Randbedingung.

$$E_y^> |_{Rand} = E_y^< |_{Rand} = E_{yr} \quad (3.146)$$

Die zweite Randbedingung stellt die Stetigkeit des Übergangs der elektromagnetischen Welle zwischen Vakuum und dem Material sicher.

$$\frac{\partial E_y^>}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial E_y^<}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial E_{yr}}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.147)$$

Aufgrund der Gleichheit der Differentialgleichungen ergeben sich identische Fundamentallösungen wie bei der p-polarisierten Welle. Die Herleitung der Randintegralgleichungen und die Diskretisierung des Randes erfolgen analog zum Vorgehen bei der p-polarisierten Welle, das in den Abschnitten 3.6 und 3.7 beschrieben wird. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen 3.146 und 3.147 ergibt sich somit ein Paar inhomogener gekoppelter Integralgleichungen für das elektrische Feld oberhalb und unterhalb der Mediengrenze.

$$E_{yr}(\boldsymbol{\xi}) = 2 E_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}) + 2 \sum_{n=1}^N \left(E_{yrn} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \frac{\partial E_{yrn}}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) \quad (3.148)$$

$$E_{yr}(\boldsymbol{\xi}) = 2 \sum_{n=1}^N \left(-E_{yrn} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \frac{\partial E_{yrn}}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) \quad (3.149)$$

Für das einfallende elektrische Feld ergibt sich gemäß der Gleichungen aus Abschnitt 3.9 die Berechnungsgleichung

$$E_y^{ein}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-i(\omega/c)z'} e^{-(x'^2/b^2)(1-2icz'/\omega^2 b)}}{[1 - (2icz')/(\omega^2 b)]^{1/2}} . \quad (3.150)$$

Die Berechnung der unbekanntenen Randwerte erfolgt analog zu Abschnitt 3.10 durch Aufstellen eines Gleichungssystems, in dem der Ladepunkt nacheinander auf alle Knoten gelegt wird. Die erste Zeile zur Betrachtung des elektrischen Feldes oberhalb der Mediengrenze ergibt sich demnach zu

$$\begin{aligned} & E_{yr1} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} 2 \frac{\partial G^>(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - 1 \right)}_{J_{11}^>} + \dots + E_{yrN} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 \frac{\partial G^>(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma}_{J_{1N}^>} \\ & - \frac{\partial E_{yr1}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_1} 2 G^>(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{K_{11}^>} - \dots - \frac{\partial E_{yrN}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 G^>(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{K_{1N}^>}}_{E_N^{norm}} = \underbrace{- 2 E_y^{ein}(\boldsymbol{\xi}_1)}_{E^{ein}} . \end{aligned} \quad (3.151)$$

Die erste Gleichung für das elektrische Feld unterhalb der Mediengrenze lautet bei gleicher Vorgehensweise

$$\begin{aligned}
 & E_{yr1} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} 2 \frac{\partial G^<(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + 1 \right)}_{J_{11}^<} + \dots + E_{yrN} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 \frac{\partial G^<(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma}_{J_{1N}^<} \\
 & - \frac{\partial E_{yr1}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_1} 2 G^<(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{K_{11}^<} - \dots - \frac{\partial E_{yrN}}{\partial \mathbf{n}} \underbrace{\int_{\Gamma_N} 2 G^<(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_1) d\Gamma}_{K_{1N}^<} = 0 .
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Zusammenfassend ergibt sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannt Randwerte in Matrixnotation zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}^> & -\mathbf{K}^> \\ \mathbf{J}^< & -\mathbf{K}^< \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^{\text{norm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{ein}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \tag{3.153}$$

Die Untermatrizen $\mathbf{J}^>$, $\mathbf{J}^<$ und $\mathbf{K}^>$ sind identisch mit den entsprechenden Matrizen $\mathbf{P}^>$, $\mathbf{P}^<$ und $\mathbf{Q}^>$ im Gleichungssystem 3.113. Die Terme der Untermatrize $\mathbf{Q}^<$ aus dem Gleichungssystem 3.113 werden lediglich durch die komplexe Dielektrizitätskonstante $\bar{\epsilon}$ dividiert, um die Untermatrize $\mathbf{K}^<$ im Gleichungssystem 3.153 zu erhalten.

Das Lösen des Gleichungssystems 3.153 liefert die unbekannt Randwerte mit denen anschließend Feldwerte oberhalb und unterhalb der Mediengrenze berechnet werden können. Im Vakuum oberhalb der Mediengrenze setzt sich das elektrische Feld E_y aus dem einfallenden Feld E_y^{ein} und dem gestreuten Feld E_y^{ost} zusammen.

$$E_y^>(\boldsymbol{\xi}) = E_y^{\text{ein}}(\boldsymbol{\xi}) + E_y^{\text{ost}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.154}$$

Hiermit ergibt sich für die Feldwerte oberhalb der Mediengrenze analog zu Abschnitt 3.11 die Gleichung

$$E_y^{\text{ost}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^N \left(E_{yrn}^> \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \frac{\partial E_{yrn}^>}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^>(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) . \tag{3.155}$$

Im dielektrischen Material unterhalb der Mediengrenze ergeben sich die Feldwerte analog zum p-polarisierten Fall zu

$$E_y^{\text{ust}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^N \left(-E_{yrn}^< \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \frac{\partial E_{yrn}^<}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_n} G^<(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right) . \tag{3.156}$$

Die Intensität des einfallenden Feldes an einem Ort \mathbf{x} oberhalb der Trenngrenze ergibt sich nach einer dem Abschnitt 3.12 entsprechenden Berechnung zu

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle|^{\text{ein}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 c}{2} E_y^{\text{ein}}(\mathbf{x}) E_y^{\text{ein}*}(\mathbf{x}) . \tag{3.157}$$

Für die Intensitäten des gestreuten Feldes oberhalb und unterhalb der Trenngrenze ergeben sich analog die beiden Gleichungen

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle|^{ost} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} E_y^{ost}(\mathbf{x}) E_y^{ost*}(\mathbf{x}) \quad (3.158)$$

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle|^{ust} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} E_y^{ust}(\mathbf{x}) E_y^{ust*}(\mathbf{x}) . \quad (3.159)$$

Zur Berechnung des einfallenden und der gestreuten Energieströme werden analog zum p-polarisierten Fall die Oberflächenintegrale über die entsprechenden Poynting Vektoren gelöst. Die Durchtrittsfläche reduziert sich dabei im 2D-Fall auf eine Durchtrittskurve. Als systembegrenzende Kurve wird jeweils ein Halbkreis mit dem Radius $r = l_{x,ges}$ genutzt. Für die Berechnung der einfallenden Energie im s-polarisierten Fall wird entlang eines Halbkreises oberhalb der Mediengrenze über den Poynting Vektor des einfallenden Feldes integriert.

$$\Phi_{e\perp}(\lambda, \vartheta_0) = \int_A \mathbf{S} \, dA = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \int_{\Gamma} E_y^{ein}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ein*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.160)$$

Die Ermittlung der reflektierten Energie des s-polarisierten Feldes erfolgt durch die Integration des Poynting Vektors des reflektierten Feldes entlang des oberhalb liegenden Halbkreises.

$$\Phi_{r\perp}(\lambda, \vartheta_0) = \int_A \mathbf{S} \, dA = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \int_{\Gamma} E_y^{ost}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ost*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.161)$$

Die Energie des transmittierten Feldes für den s-polarisierten Fall wird analog durch eine Integration des Poynting Vektors des transmittierten Feldes entlang des unterhalb der Mediengrenze liegenden Halbkreises berechnet.

$$\Phi_{t\perp}(\lambda, \vartheta_0) = \int_A \mathbf{S} \, dA = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \int_{\Gamma} E_y^{ust}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ust*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.162)$$

Die Kenntnis der einfallenden und reflektierten Energie für den s-polarisierten Fall ermöglicht nun die Berechnung des gerichteten hemisphärischen spektralen Reflektionsgrads. Die Division der reflektierten Energie durch die einfallende Energie ergibt somit

$$\rho'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta_0) = \frac{\Phi_{r\perp}(\lambda, \vartheta_0)}{\Phi_{e\perp}(\lambda, \vartheta_0)} = \frac{\int_{\Gamma} E_y^{ost}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ost*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}{\int_{\Gamma} E_y^{ein}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ein*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma} . \quad (3.163)$$

Unter Berücksichtigung der Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit aus Gleichung 3.139 folgt für den Transmissionsgrad des s-polarisierten Feldes

$$\tau'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta_0) = \frac{\Phi_{t\perp}(\lambda, \vartheta_0)}{\Phi_{e\perp}(\lambda, \vartheta_0)} = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{\int_{\Gamma} E_y^{ust}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ust*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}{\int_{\Gamma} E_y^{ein}(\mathbf{x}, \vartheta_0) E_y^{ein*}(\mathbf{x}, \vartheta_0) \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}. \quad (3.164)$$

Der Zusammenhang zwischen den optischen Eigenschaften gemäß Gleichung 2.45 erlaubt nun die Berechnung des gerichtet spektralen Emissionsgrads für den s-polarisierten Fall.

$$\varepsilon'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta_0) = 1 - \rho'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta_0) - \tau'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta_0) \quad (3.165)$$

Die Berechnung für den unpolarisierten Fall erfolgt im Anschluss an die Berechnungen für den p- und s-polarisierten Fall durch Bildung des arithmetischen Mittels aus den polarisierten Größen. Für den gerichteten spektralen Emissionsgrad einer unpolarisierten Strahlung folgt damit

$$\varepsilon'_{\lambda}(\lambda, \vartheta_0) = \frac{\varepsilon'_{\lambda\perp}(\lambda, \vartheta_0) + \varepsilon'_{\lambda\parallel}(\lambda, \vartheta_0)}{2}. \quad (3.166)$$

3.14 Das programmierte Verfahren

Das in dieser Arbeit programmierte Verfahren gliedert sich, wie in Abbildung 3.11 dargestellt, in die 3 Teile Preprocessing, Berechnung und Postprocessing. Das Preprocessing erfolgt mittels eines in der MatLab-Umgebung erstellten Programms. Vorab ist es jedoch notwendig, einen Datensatz mit den zu betrachtenden Wellenlängen und den entsprechenden komplexen Brechzahlen zu erstellen. Dieser Datensatz wird eingelesen und durch die damit vorgegebenen Wellenlängen wird bestimmt, mit welcher spektralen Auflösung die Berechnung erfolgt. Die Daten der komplexen Brechzahl können geeigneten Tabellen in den Stoffdatensammlungen von Touloukian [58], Gray [18] und Palik [47] entnommen werden. Den Hauptbestandteil des Preprocessings stellt die Bestimmung der Oberflächengeometriedaten dar. In dem relierierten Verfahren werden die untersuchten Geometrien nicht graphisch erstellt und dann vernetzt, sondern direkt durch entsprechende Programmabschnitte generiert. In der MatLab-Umgebung können Periode, Rinnenbreite, Rinnentiefe und Stützstellenanzahl vorgegeben werden. Zum Abschluss des Preprocessing werden die Geometriedaten gespeichert und eine Steuerdatei für den Berechnungsteil erstellt. Die Steuerdatei enthält Informationen zu den zu untersuchenden Wellenlängen, den komplexen Brechzahlen und zur Knotenanzahl.

Die Berechnung erfolgt nicht in der MatLab-Umgebung, da sie hierfür zu viel Arbeitsspeicher benötigt. Für die aufwendige Numerik wird ein selbsterstelltes Fortran-Programm genutzt. Zur Realisierung einer ausreichenden Knotenanzahl und einer annehmbaren Berechnungszeit wird das Programm auf einem Hochleistungsrechner der Firma HP mit der Typenkennung „Integrity SuperDome sx2000 “ausgeführt. Eine REM-Berechnung bei einer Wellenlänge und einer Stützstellenanzahl von 4000 Stützstellen benötigt auf diesem Rechner ca. 30 Minuten.

Zuerst werden für die Berechnung die Steuerdaten und die Geometriedaten eingelesen. Basierend auf diesen Werten erfolgt die Berechnung der benötigten Normalenvektoren.

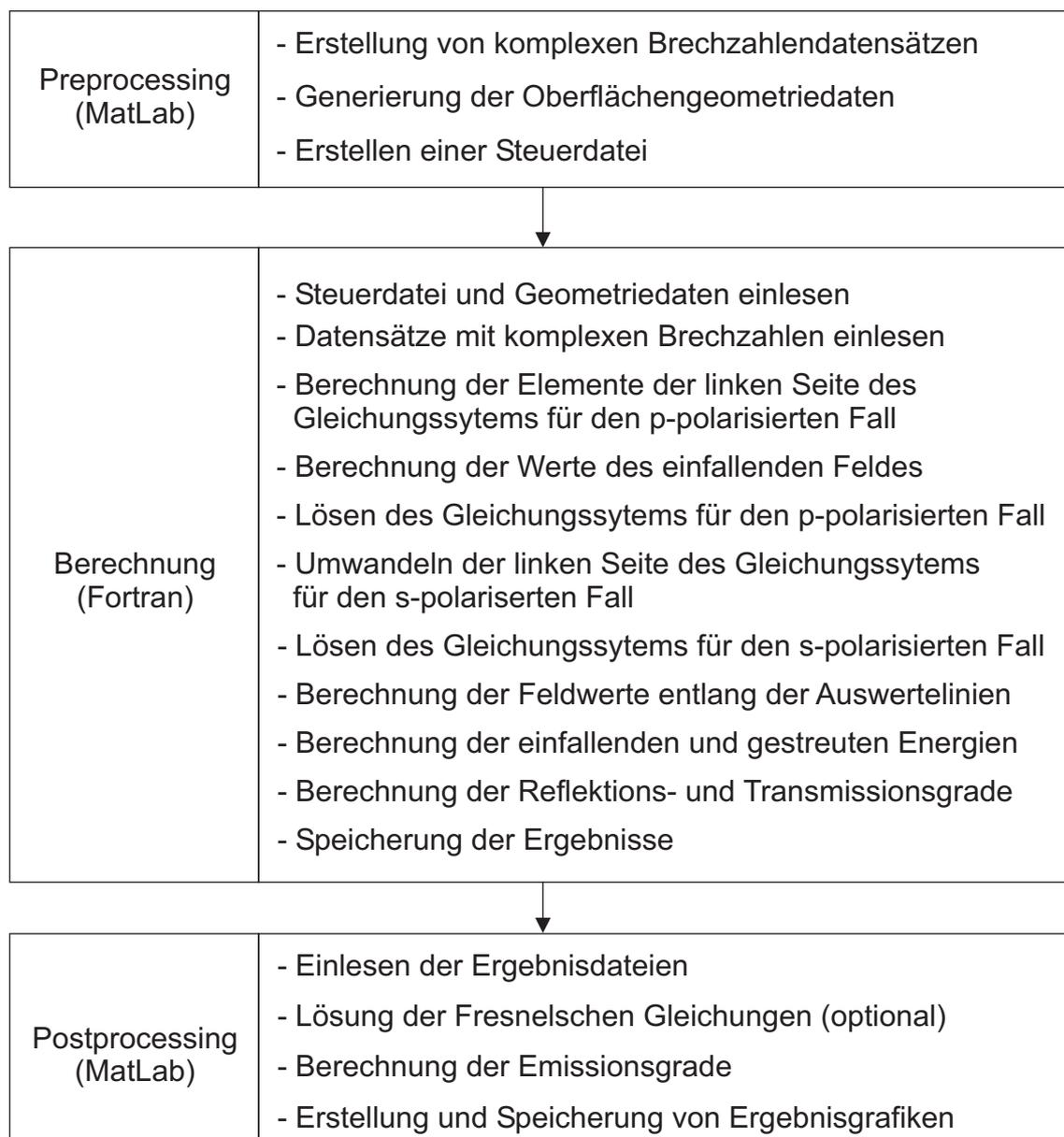


Abb. 3.11 Ablauf des realisierten Berechnungsverfahrens

Darauf aufbauend wird die Matrix 3.113 zur Berechnung der unbekanntenen Randwerte berechnet. Das aufzubauende Gleichungssystem lautet demnach

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^> & -\mathbf{Q}^> \\ \mathbf{P}^< & -\mathbf{Q}^< \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^{\text{norm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{\text{ein}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.167)$$

Die Elemente der Untermatrizen werden entsprechend der Gleichungen 3.111 und 3.112 berechnet. Es folgen somit für die Elemente, die nicht auf den Hauptdiagonalen der Untermatrizen liegen, die einprogrammierten Gleichungen zu

$$P_{ij}^> = -\Delta L \frac{i}{2} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i| \right) \frac{(\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i) \cdot \mathbf{n}_j}{|\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i|}, \quad (3.168)$$

$$-Q_{ij}^> = -\Delta L \frac{i}{2} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i| \right), \quad (3.169)$$

$$P_{ij}^< = -\Delta L \frac{i}{2} \frac{\bar{n}\omega}{c} H_1^{(1)} \left(\frac{\bar{n}\omega}{c} |\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i| \right) \frac{(\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i) \cdot \mathbf{n}_j}{|\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i|}, \quad (3.170)$$

$$-Q_{ij}^< = -\Delta L \bar{\varepsilon} \frac{i}{2} H_0^{(1)} \left(\frac{\bar{n}\omega}{c} |\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_i| \right). \quad (3.171)$$

Die Berechnung der Hankel Funktionswerte erfolgt dabei mit der ZBESH-Routine aus der NAG-Codebibliothek [44]. Die auf den Hauptdiagonalen liegenden Elemente ergeben sich entsprechend der Betrachtungen aus Abschnitt 3.8 zu

$$P_{ii}^> = -1, \quad (3.172)$$

$$-Q_{ii}^> = \frac{\Delta L}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{\omega \Delta L}{2c} \right) + \ln \left(-\frac{\omega \Delta L}{2c} \right) - 2 \right), \quad (3.173)$$

$$P_{ii}^< = 1, \quad (3.174)$$

$$-Q_{ii}^< = \frac{\Delta L \bar{\varepsilon}}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{n}\omega \Delta L}{2c} \right) + \ln \left(-\frac{\bar{n}\omega \Delta L}{2c} \right) - 2 \right). \quad (3.175)$$

Zur vollständigen Füllung des Gleichungssystems werden die Werte des einfallenden Feldes gemäß

$$H_y^{\text{ein}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-i(\omega/c)z'} e^{-(x'^2/b^2)(1-2icz'/\omega^2 b)}}{[1 - (2icz')/(\omega^2 b)]^{1/2}} \quad (3.176)$$

mit $x' = x \cos \vartheta_0 + z \sin \vartheta_0$ und $z' = -x \sin \vartheta_0 + z \cos \vartheta_0$ berechnet.

Auf das Aufstellen des Gleichungssystems folgt der zeitaufwendigste Schritt der Berechnung die LU-Zerlegung der Gleichungssystemmatrix. Für die Zerlegung wird die ZGETRF-Routine aus der LAPACK-Codebibliothek [44] genutzt. Das Ergebnis der Zerlegung wird anschließend genutzt, um mit der ZGETRS-Routine aus der LAPACK-Codebibliothek die Lösung des Gleichungssystems zu berechnen.

Auf dem Gleichungssystem für den p-polarisierten Fall basierend erfolgt die Umrechnung des Gleichungssystems für den s-polarisierten Fall zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}^> & -\mathbf{K}^> \\ \mathbf{J}^< & -\mathbf{K}^< \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^{\text{norm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{ein}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

mit

$$\mathbf{J}^> = \mathbf{P}^>, \quad \mathbf{J}^< = \mathbf{P}^<, \quad \mathbf{K}^> = \mathbf{Q}^> \quad \text{und} \quad \mathbf{K}^< = \frac{\mathbf{Q}^<}{\bar{\epsilon}}.$$

Nach der Lösung des Gleichungssystems für den s-polarisierten Fall werden die Feldwerte für das magnetische Feld H_y und für das elektrische Feld E_y entlang der Auswertelinien, wie in den Abschnitten 3.11 und 3.13 beschrieben, berechnet. Mit den so ermittelten Feldwerten werden nun die einfallenden und gestreuten Energien für den s-polarisierten und den p-polarisierten Fall gemäß dem Vorgehen aus den Abschnitten 3.12 und 3.13 bestimmt. Die Integrationen erfolgen durch eine feine Diskretisierung der Auswertelinien in N Teilstücke und einer anschließenden Aufsummierung der Produkte aus dem jeweiligen Integranden und dem Teilstück des Randes $\Delta\Gamma_i$. Für die einfallende Energie im p-polarisierten Fall ergibt sich die einprogrammierte Summierung zu

$$\Phi_{e||}(\lambda, \vartheta_0) = \frac{\mu_r \mu_0 c}{2} \sum_{i=1}^N H_y^{ein}(\mathbf{x}_i, \vartheta_0) H_y^{ein*}(\mathbf{x}_i, \vartheta_0) \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\Gamma_i \quad (3.178)$$

Die weiteren Energiewerte werden analog bestimmt. Die Berechnung der Reflektions- und Transmissionsgrade durch Division der entsprechenden Energien schließt den Berechnungsteil des Fortranprogramms ab. Zur weiteren Bearbeitung werden die berechneten Reflektions- und Transmissionsgrade in einer Textdatei gespeichert.

Das Postprocessing innerhalb der MatLab-Umgebung dient der Aufbereitung und der Visualisierung der gespeicherten Ergebnisse des Berechnungsteils. Entsprechend der Beziehungen zwischen den optischen Eigenschaften erfolgt die Berechnung der Emissionsgrade für den p- und den s-polarisierten Fall. Abschließend erfolgt die Berechnung der optischen Eigenschaften für den unpolarisierten Fall. Die berechneten Ergebnisse werden gespeichert und in Graphen dargestellt. Es ist dabei möglich die optischen Eigenschaften wellenlängenabhängig und winkelabhängig darzustellen.

Eine umfassende Darstellung zur Validierung der Rechnung erfolgt in Kapitel 5. Die wichtigen Parameter Stützstellenanzahl und Breite der Normalverteilung werden untersucht. Darüber hinaus werden Vergleichsrechnungen mit den Fresnelschen Gleichungen zur Beurteilung der Qualität der REM-Berechnungen durchgeführt.

4 Die Messung von Strahlungseigenschaften

Die Messung optischer Eigenschaften erfordert einen hohen apparativen Aufwand, um möglichst große Raum-, Spektral- und Temperaturbereiche erfassen zu können. Die Erfordernisse und möglichen Messverfahren werden in diesem Kapitel zuerst beschrieben. Hieran schließt sich eine umfassende Beschreibung der realisierten Versuchsanlage und ihrer Komponenten an. Dies ermöglicht ein gutes Verständnis ihrer Bedeutung für das Messverfahren über die Messwertaufnahme bis hin zur automatisierten Messwertauswertung.

4.1 Mögliche Messverfahren

Es gibt eine große Auswahl an Verfahren zur Messung von Emissionsgraden. Ein kurzer Überblick über die möglichen Messverfahren ermöglicht eine bessere Einordnung des gewählten Verfahrens. Wichtige Auswahlkriterien sind der Temperaturbereich, der Aggregatzustand der untersuchten Probe und die zu messende Größe, da gerichtete oder hemisphärische, spektrale oder gesamte Emissionsgrade gemessen werden können. Eine systematische Einteilung der Verfahren zur Bestimmung von Emissionsgraden technischer Oberflächen basierend auf den physikalischen Grundlagen der Verfahren ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Die indirekten Messverfahren nutzen Zusammenhänge zwischen dem Emissionsgrad und anderen optischen Eigenschaften der Oberflächen. Es wird z.B. der Absorptionsgrad durch Auswertung des Zeitverlaufs der Erwärmung einer dünnen Probenplatte aufgrund der Absorption einfallender Laserstrahlung gemessen [54] und über das Kirchhoffsche Gesetz der Emissionsgrad ermittelt. Aus der Messung von Reflektionsgraden lässt sich der Emissionsgrad bei nicht transmissiven Oberflächen einfach gemäß Gleichung 2.46 berechnen. Im sichtbaren Strahlungsbereich werden radiometrische Verfahren eingesetzt um den Reflektionsgrad einer Probe zu ermitteln, um dann den Emissionsgrad zu berechnen. Der Grund für die Verwendung dieser Methoden ist die geringe ausgesandte Strahlungsenergiedichte im Bereich sichtbarer Wellenlängen bei Probertemperaturen unter 1000°C . Die Messung der Komponenten der komplexen Brechzahl erlaubt mit Hilfe der Fresnelschen Gleichungen die Berechnung von Emissionsgraden wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben.

Die Methoden bei denen der Emissionsgrad selbst die Messgröße darstellt werden als direkte Messverfahren bezeichnet. Man unterscheidet hier im wesentlichen radiometrische und kalorimetrische Verfahren. Die kalorimetrischen Methoden basieren entweder

auf der Analyse des Temperatur-Zeit Verhaltens oder der Messung der Wärmestromdichte in der Probe. Es werden stationäre und instationäre Messungen unterschieden. Bei den stationären Verfahren wird der Emissionsgrad auf der Basis der Leistungszufuhr ermittelt, die für die konstante Temperierung der Probe erforderlich ist. Die instationären Verfahren werten periodische oder aperiodische Temperaturverläufe der Probe bei der Strahlungswärmeübertragung zwischen Probe und Umgebung aus, um den Emissionsgrad zu ermitteln.

Die kalorimetrischen Verfahren überzeugen durch einen einfachen apparativen Aufbau. Der Nachteil der kalorimetrischen Verfahren ist die fehlende Möglichkeit, spektrale oder gerichtete Emissionsgrade zu messen, da immer nur der gesamte Strahlungsaustausch zwischen Probe und Umgebung bei diesen Verfahren untersucht werden kann.

Die radiometrischen Methoden beruhen auf dem statischen oder dynamischen Vergleich von Strahlungssignalen der Probe und eines Referenzstrahlers. Aufgrund seiner besonderen, in Kapitel 2.1 beschriebenen Eigenschaften wird versucht einen möglichst schwarzen Körper als Referenz einzusetzen. Die technische Realisierung erfolgt dabei durch die Nutzung von Hohlraumstrahlern. Durch veränderbare geometrische Anordnung und spektrale Signaldetektierung erlauben radiometrische Verfahren die Messung von gerichteten und spektralen Größen. Dabei unterscheiden sich nach Linka [36] die radiometrischen Messsysteme hinsichtlich:

- der Probenheizung (Induktion, Elektronenstrahlen, Laser, direkter Stromdurchgang, indirekte Widerstandsheizung)

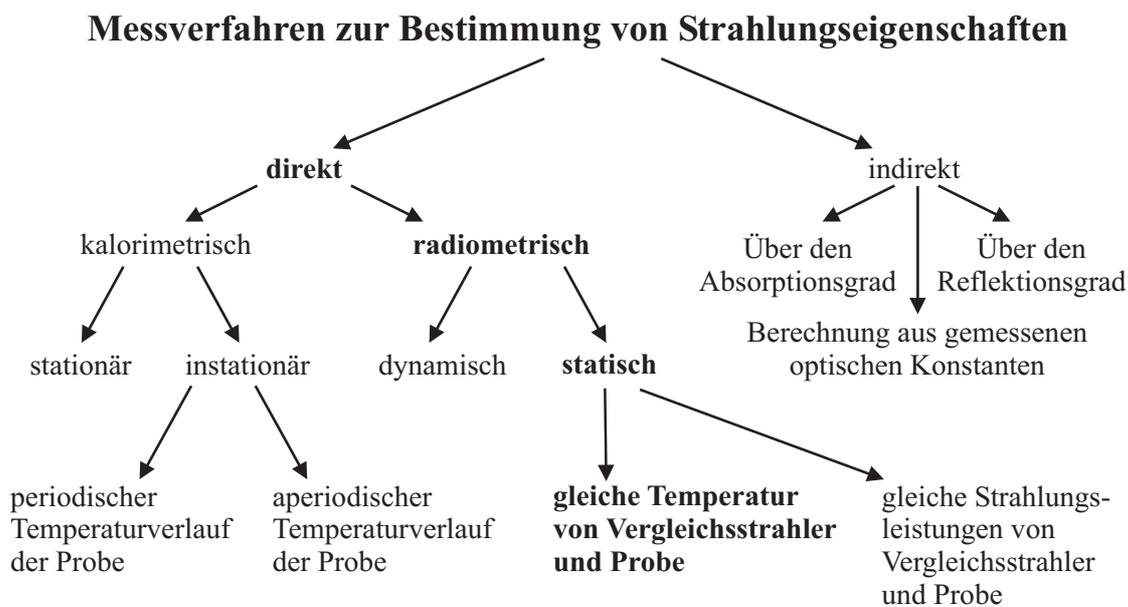


Abb. 4.1 Einteilungsschema von Messverfahren zur Bestimmung von Strahlungseigenschaften von technischen Oberflächen nach Linka [36]

- der Messrichtung (hemisphärisch, normal, richtungsabhängig)
- der Realisierung des schwarzen Körpers (Bauart, Material)
- der Strahlungszerlegung bei der spektralen Energiemessung (Monochromator, Spektrometer, FTIR-Spektrometer, optische Filter, Pyrometer)

Die Probe und der Schwarze Körper werden bei den statischen, radiometrischen Messungen auf die gleiche Temperatur eingestellt. Dies ermöglicht eine direkte Berechnung des Emissionsgrades durch Division der detektierten Strahlungsleistungen.

Ein möglicher Temperaturunterschied zwischen dem schwarzen Körper und der Probenoberfläche stellt die größte Fehlerquelle bei der Durchführung statischer, radiometrischer Emissionsgradmessungen dar. Einen Versuch diese Fehlerquelle zu vermeiden unternehmen dynamische radiometrische Messmethoden, die ohne einen schwarzen Körper arbeiten. Der Vergleich von Proben- und Referenzstrahlung wird durch einen Strahlungsvergleich auf Basis zweier von der Probenstrahlung abgeleiteter Strahlungssignale durchgeführt [46]. Am häufigsten werden zur Messung von gerichteten oder spektralen Emissionsgraden statische, radiometrische Verfahren im infraroten Spektralbereich eingesetzt. So wurden von Janßen [29] gerichtete und hemisphärische Gesamtemissionsgrade von Gläsern unter Atmosphärenbedingungen im Temperaturbereich von 50°C bis 100°C und von Lohrengel [37] gerichtete Gesamtemissionsgrade schlechter Wärmeleiter im Temperaturbereich von -60°C bis 250°C gemessen. Einige weitere Veröffentlichungen zur Messung von Emissionsgraden werden in den Arbeiten von Koirala [33] und Burk [9] ausführlich vorgestellt.

In dieser Arbeit wird die im folgenden Abschnitt beschriebene Versuchsanlage basierend auf den Arbeiten von Labuhn [34] und Koirala [33] genutzt. Das genutzte Messverfahren ist eine statische, radiometrische Methode, bei der die Probenausstrahlung mit der eines Hohlraumstrahlers bei gleicher Temperatur verglichen wird.

4.2 Die Versuchsanlage

Die Versuchsanlage ist so konzipiert, dass die Messung gerichteter, spektraler Emissionsgrade in einem möglichst großen Wellenlängen- und Raumwinkelbereich möglich ist. Die realisierte Anlage erlaubt sinnvolle Messungen in einem Polarwinkelbereich von 0° bis 70° und einem Azimutwinkelbereich von 0° bis 90°. Eine spektrale Auflösung im Bereich von 5 μm bis 25 μm ist möglich. Die Probe kann dabei bis maximal 250°C aufgeheizt werden. Die realisierte Messmethode, bei der Probe und Referenzstrahler örtlich getrennt sind, eignet sich besonders für die relativ niedrigen Messtemperaturen von 370 K bis 550 K.

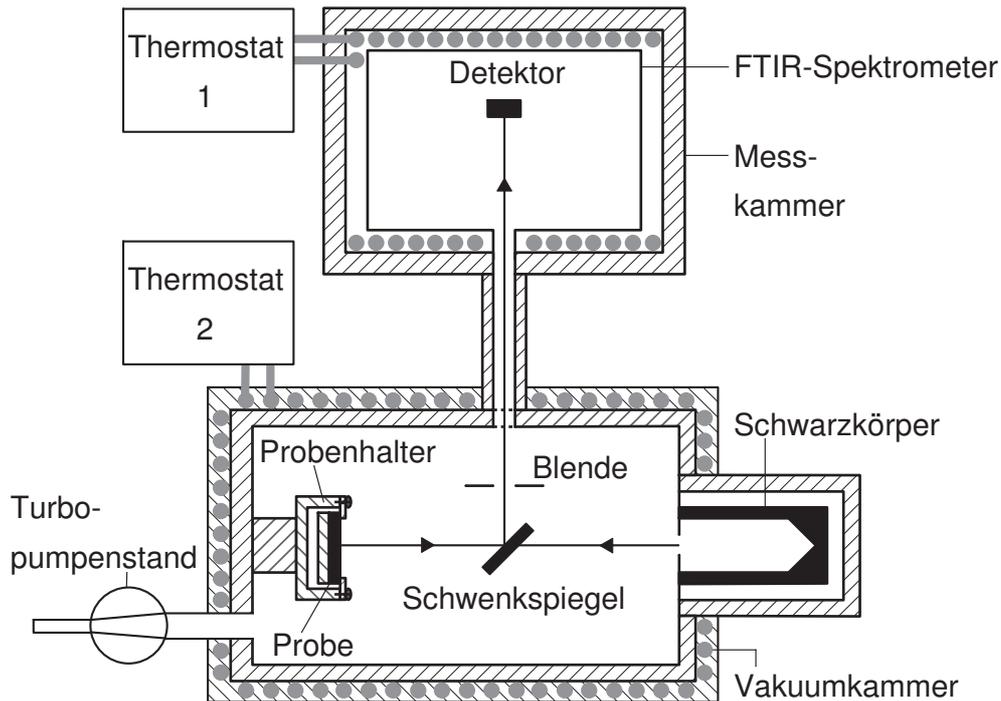


Abb. 4.2 Schematische Darstellung der Versuchsanlage

Die Versuchsanlage besteht im Wesentlichen aus zwei Kammern, die über ein Kupferrohr, wie in Abbildung 4.2 skizziert, verbunden sind. In der Vakuumkammer befindet sich der Probenhalter, mit allen Positioniereinrichtungen und der Probenheizung samt der Probe als Messsignalquelle. Der eingebaute zylinderförmige Hohlraumstrahler dient als Referenzquelle. Die Innenwände der Probenkammer sind mit einem Schwarzlack mit der Handelsbezeichnung Nextel-Velvet Coating 811-21 beschichtet. Der Schwarzlack hat einen hemisphärischen Gesamtemissionsgrad von 0,94. Dies reduziert die Messwerte verfälschende Hintergrundstrahlung, da die von den beheizten Bauteilen ausgesendete Wärmestrahlung nur gering reflektiert wird. Zur weiteren Verringerung der Hintergrundstrahlung und Verbesserung der Reproduzierbarkeit wird die Vakuumkammer während der Messungen mittels eines Thermostaten (Thermostat 2) mit angeschlossener Kupferrohrumwicklung der Vakuumkammer auf eine Temperatur von 10°C thermostatisiert.

Für die exakte Bestimmung der Oberflächentemperatur der Probe und der reinen Messung von Strahlungsvorgängen muss in der Vakuumkammer ein Hochvakuum erzeugt werden. Im Druckbereich unterhalb von 1 Pa ist der Anteil konvektiver Wärmeübertragung stark reduziert und kann somit bei der Messwertauswertung vernachlässigt werden. Zur Erzeugung dieses Hochvakuums wird der Turbopumpstand TSH 071 der Firma Pfeiffer Vacuum eingesetzt. Der Pumpstand besteht im Wesentlichen aus einer Turbomolekular-Druckpumpe und einer Drehschiebervakuumpumpe als Vorpumpe. Ei-

ne Vorpumpe wird benötigt, da die Turbomolekularpumpe zwar geeignet ist um sehr niedrige Drücke zu erzeugen, jedoch nur gegen einen sehr geringen Vorvakuumdruck fördern kann. Die Messungen wurden bei Drücken zwischen 0,3 Pa und 0,7 Pa durchgeführt. Hierzu muss der Pumpstand dauerhaft betrieben werden.

Die Notwendigkeit die Vakuumkammer druckdicht zu verschliessen, erfordert die Installation einer transmissiven Strahldurchführung von der Vakuumkammer zur Messkammer. Hierzu wird ein im gesamten detektierten infraroten Wellenlängenbereich stark transmissives K-Br Fenster eingesetzt. Dessen Transmissionsgrad in Abbildung 4.3 a) spektralabhängig dargestellt ist. Um die Probenoberflächentemperatur von außen überprüfen zu können ist ein Zn-Se Fenster in die Verschlussklappe der Vakuumkammer eingebaut. Es ermöglicht die Verwendung einer Wärmebildkamera zur Überprüfung der Oberflächentemperaturverteilung der Probe. Die Detektoren der Wärmebildkamera arbeiten in einem kleinen Spektralbereich bei $\lambda = 13 \mu\text{m}$. Hier weist das Zn-Se Fenster einen ähnlichen hohen Transmissionsgrad auf wie das K-Br Fenster wie in Abbildung 4.3 b) zu erkennen ist. Das Zn-Se hat den Nachteil das es nicht im gesamten erfassten Bereich ausreichend transmissiv ist. Von Vorteil sind seine geringeren hykroskopischen Eigenschaften. Es besteht keine Erblindungsgefahr wie bei den K-Br Fenstern.

Der drehbare Schwenkspiegel wird genutzt um das jeweilige Strahlungssignal von der Probe oder von dem Hohlraumstrahler in das Spektrometer einzukoppeln. Der Spiegel ist mit Gold beschichtet, damit wird im infraroten Wellenlängenbereich eine möglichst hohe Signalweiterleitung erreicht, da goldbeschichtete Oberflächen in diesem Spektralbereich Reflektionsgrade über $\rho = 0,98$ aufweisen. Die exakte Positionierung des Spiegels beim Schwenk von der Probe zum Hohlraumstrahler wird durch einstellbare, mechanische Endanschläge realisiert. Erst nach Erreichen der Endanschläge wird ein Federsystem gespannt, das den Endlagenschalter betätigt und die Drehbewegung des Spiegels stoppt.

In der Messkammer ist ein Fouriertransformation - Infrarot - Spektrometer zur spek-

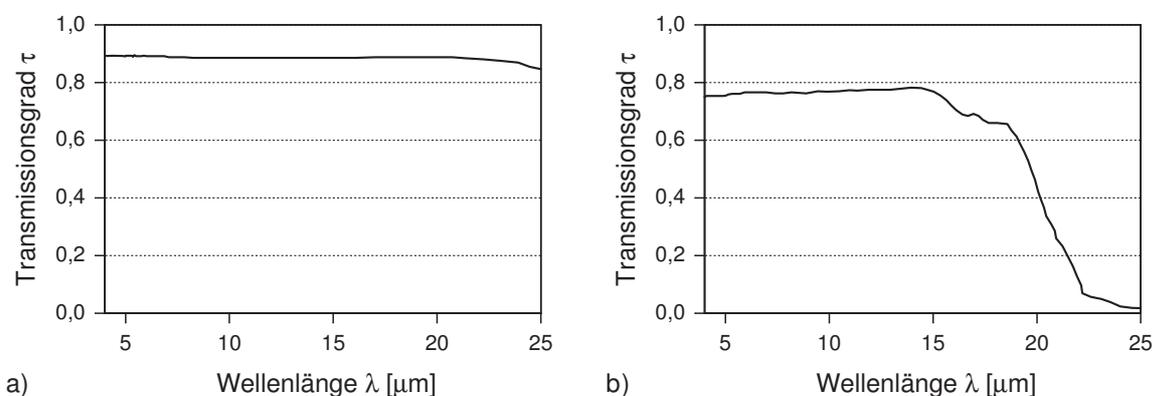


Abb. 4.3 Transmissionsspektren der eingebauten Fenster: a)K-Br b)Zn-Se

tralen Detektierung der Strahlungsleistung installiert. Zur Gewährleistung der Reproduzierbarkeit der Messungen wird die Messkammer mittels eines an einen weiteren Thermostaten (Thermostat 1) angeschlossenen Wärmeübertragers bei einer Thermostattemperatur von 5°C thermostatisiert. Um eine homogene Temperaturverteilung in der Messkammer zu erzielen ist außerdem ein Lüfter eingebaut, der für eine kontinuierliche Luftumwälzung in der Kammer sorgt.

Die zwischen dem Schwenkspiegel und der Eingangsapertur des FTIR-Spektrometers eingebaute Blende und das gekühlte Verbindungsrohr der beiden Kammern stellen sicher, dass die bei den Messungen probenseitig und in der Öffnung des Hohlraums erfassten Flächen gleich groß sind. Ein umfassendere Beschreibung des Einflusses der Messfläche ist in den Arbeiten von Ghoul [17] und Grohmann [22] zu finden.

Zur Regelung der Temperatur der Probe und des Schwarzkörpers wird jeweils ein Temperatur-Laborregler LC4 der Firma Julabo eingesetzt. Die Messung aller weiteren Temperaturen erfolgt über ein Multimeter (Keithley: Model 2700 mit einer 7708 Multiplexer Karte) an das die genutzten Thermoelemente Typ K und die Platinwiderstandsthermometer PT100 angeschlossen sind. Zwei Gleichspannungsquellen werden zur Versorgung der Positionier- und Schwenkmotoren eingesetzt. Sie werden über eine AD-Wandler Box (SCB-68) der Firma National Instruments angesteuert. Eine genauere Erläuterung der Ansteuerung und Messdatenerfassung erfolgt im Abschnitt 4.2.5 im Rahmen der Einbindung der Steuer- und Erfassungseinrichtungen in die automatisierte Anlage.

Für das Messverfahren von besonderer Bedeutung sind das Probensystem, der Schwarzkörperstrahler und das verwendete FTIR-Spektrometer. Diese Anlagenteile werden in den folgenden Abschnitten umfassender erläutert.

4.2.1 Das Probensystem

Das Probensystem besteht aus der Probenhalterung, den Positionierantrieben, der Probenheizung und der jeweiligen Probe. Zur Untersuchung der Richtungseigenschaften, der von der Probenoberfläche emittierten Strahlung, ist es notwendig die Probe auf unterschiedlichen Polarwinkel und Azimutwinkel einzustellen. Diese Positionierung wird durch den Probenhalter ermöglicht. Er ermöglicht die Drehung der Probe um die zwei Achsen, die in Abbildung 4.4 dargestellt sind. Die Verstellung der Achsen erfolgt mittels vakuumgeeigneter Stabankermotoren, deren Drehzahl über die steuerbare Gleichspannungsquelle eingestellt wird. Die Erfassung der Winkellage der Probenhalterung ist durch strichcodierte Absolutdrehgeber realisiert. Die weiterführende Beschreibung der Einstellung der Winkellage als Teil der Automatisierung wird in Abschnitt 4.2.5 gegeben.

Die Justierung der Nullage der Probe wird mit einem Laserjustiersystem und einem

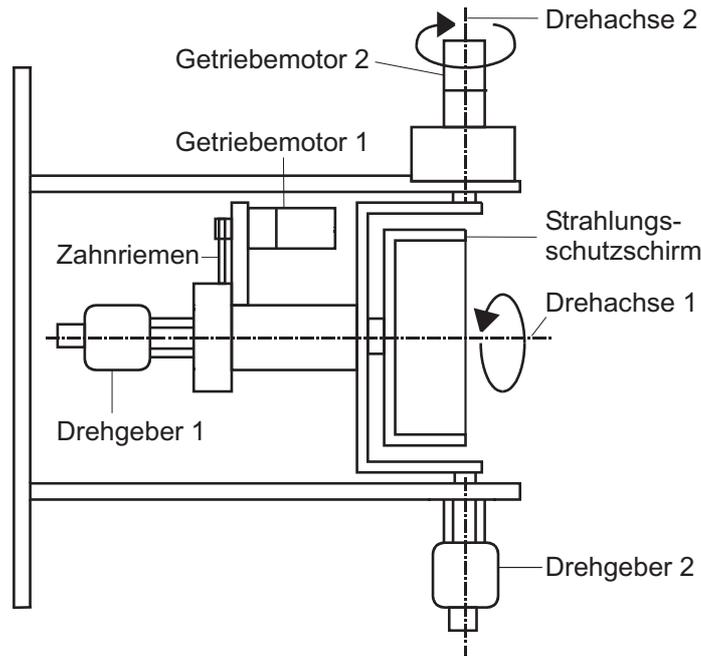


Abb. 4.4 Schematische Darstellung des Probenhalters

Autokollimationsfernrohr durchgeführt. Das Laserjustiersystem wird genutzt um das jeweilige Zentrum von Probenoberfläche, Schwenkspiegel, Schwarzkörper und Blende auf einen Strahlengang auszurichten. Das Autokollimationsfernrohr wird eingesetzt um die Nulllage des Zenitwinkels der Probenhalterung einzurichten. Hierzu wird ein Spiegel als Probe eingebaut und die gesamte Halterung entsprechend der Anzeige des Autokollimationsfernrohres mittels Stellschrauben ausgerichtet.

Die gemessene Teiloberfläche der Probe bei normaler Stellung zum Spiegel ($\vartheta = 0^\circ$) entspricht der kreisförmigen Öffnung der Blende mit einem Durchmesser von $d_B = 45$ mm. Bei der Messung der gerichteten, spektralen Strahlungsleistung muss die Probe auf unterschiedliche Polarwinkel gedreht werden. Die kreisförmige Messfläche wird dadurch in horizontaler Richtung gestreckt und nimmt eine elliptische Form an. Es ist sicherzustellen dass der größte Durchmesser dieser Ellipse $d_{M,max}$ bei einer Messung nicht größer ist als der Probendurchmesser $d_p = 150$ mm. Der größere Ellipsendurchmesser ist dabei vom Polarwinkel ϑ abhängig.

$$d_{M,max} = \frac{d_B}{\cos \vartheta} \quad (4.1)$$

Der größte gemessene Durchmesser soll $d_{M,max} = 140$ mm sein, um den Einfluss von Randeffekten einer nicht vollständig isothermen Oberflächentemperatur zu verringern. Der maximale Polarwinkel ϑ_{max} für die Messungen ergibt sich damit zu

$$\vartheta_{max} = \arccos \left(\frac{d_B}{d_{M,max}} \right) = \arccos \left(\frac{45 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} \right) = 71,25^\circ \quad (4.2)$$

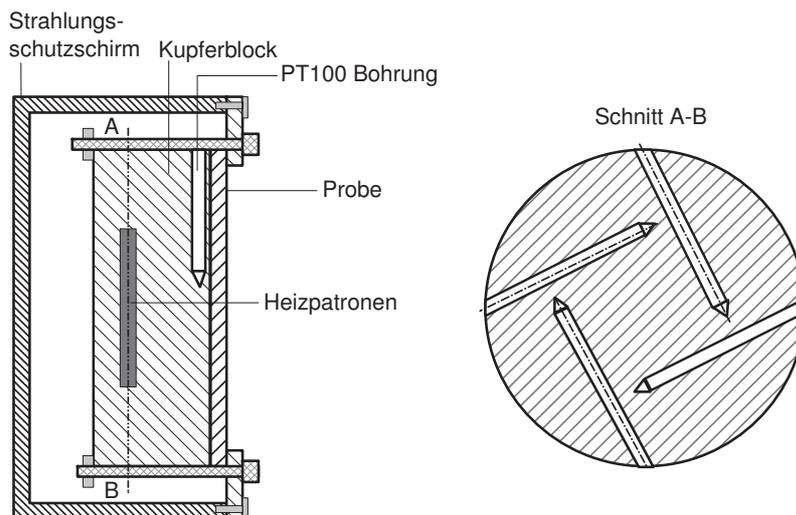


Abb. 4.5 Schematische Darstellung der Probenheizung

Da die Probe während der Messung um konstante Winkelabstände von $\Delta\vartheta = 5^\circ$ gedreht wird, ist der maximale Polarwinkel auf $\vartheta_{max} = 70^\circ$ festgelegt worden.

Bei Probenheizung und die Probe bilden eine Einheit. Die Probe wird durch ein Spannsystem, das auf den Rand der Probe wirkt, auf dem Kupferblock der Probenheizung, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, befestigt. Zur Verbesserung der Wärmeleitung wird wenn möglich eine Wärmeleitpaste zwischen Probe und Probenheizung eingesetzt. Die Wärmeleitung über das Spannsystem wird minimiert durch möglichst geringe Berührungsflächen und durch den Einsatz eines schlecht wärmeleitenden Kunststoffes für die Auflagering und Distanzhülsen des Spannsystems.

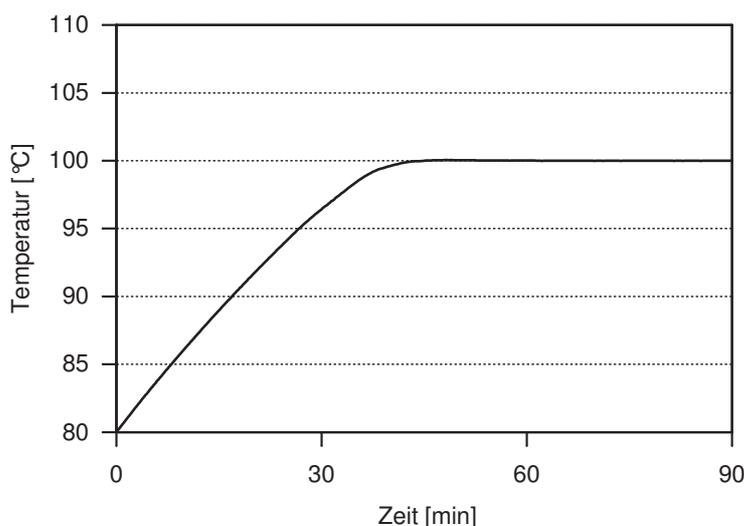


Abb. 4.6 Aufheizkurve der Probenheizung

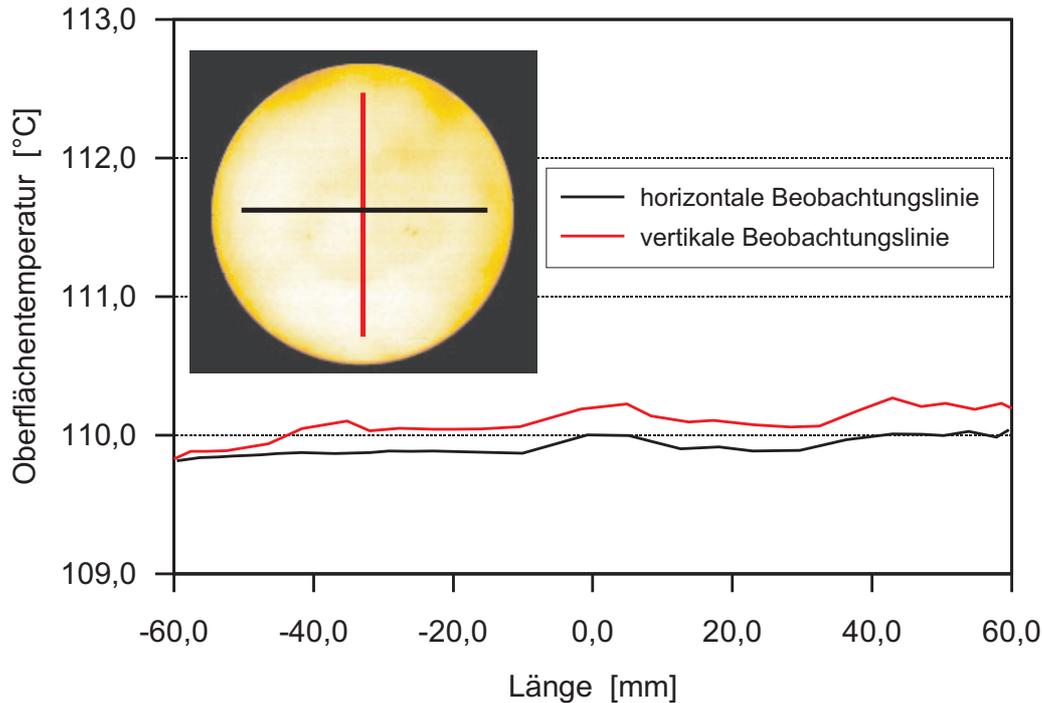


Abb. 4.7 Oberflächentemperatur

Die Wärmeabstrahlung der Probenheizung soll das Messsignal möglichst wenig beeinflussen. Aus diesem Grund ist die Probenheizung in einem Strahlungsschutzschirm eingebaut. Außerdem sind der Strahlungsschutzschirm und die Probenheizung verchromt, um die emittierte Strahlungsleistung mittels eines kleinen Emissionsgrades zu minimieren.

Der Kupferblock wird mit Heizpatronen, die jeweils eine maximale Leistungsaufnahme von 50 W ermöglichen, elektrisch beheizt. Die Regelung und damit die Thermostatisierung der Probenheizung erfolgt mit einem Temperatur-Laborregler LC4 der Firma Julabo. Das Messglied der Regelstrecke ist das in den Kupferblock eingesteckte Platinwiderstandsthermometer. Die geregelte Stellgröße ist die elektrische Leistungszufuhr an die Heizpatronen. Die in Vorversuchen ermittelten Regelparameter ermöglichen ein schnelles Aufheizen der Probe und eine konstante Temperierung, wie es die Aufheizkurve in Abbildung 4.6 zeigt.

Das Kupfer bewirkt eine gute Wärmeverteilung und ermöglicht somit eine isotherme Oberflächentemperatur. Zur Überprüfung der Isothermie der Oberfläche wird mit einer Wärmebildkamera (FLIR-Systems, Thermovision 900) ein Bild von der auf 110°C thermostatisierten Oberfläche der Probenheizung gemacht. Die in Abbildung 4.7 dargestellte Auswertung dieses Bildes zeigt eine ausreichend gut angenäherte Isothermie der Oberfläche. Die gemessenen Abweichungen liegen weit unterhalb der Messungenauigkeit der Kamera von ± 1 K.

4.2.2 Der Schwarzkörperstrahler

Der zur Ermittlung des gerichteten, spektralen Emissionsgrades gemessene Referenzstrahler wird in der Versuchsanlage durch einen Hohlraumstrahler, der in Abbildung 4.8 dargestellt ist, realisiert. Die Konstruktion des Schwarzkörperstrahlers stellt dabei sicher, dass der Hohlraum von isothermen Wänden gebildet wird und die Öffnung einen möglichst großen effektiven Emissionsgrad aufweist.

Der gleichmäßig um den Umfang des Hohlraumstrahlers gewickelte Heizleiter ermöglicht die elektrische Beheizung. Die Heizleistung wird so geregelt, dass sich pseudo-adiabate und isotherme Innenwände ergeben. Die homogene Temperaturverteilung wird durch die Verwendung von gut wärmeleitendem Kupfer sichergestellt. Die Aussenseite ist poliert und verchromt, um mögliche Wärmeverluste durch Strahlung zu minimieren. Ein Platin-Widerstandsthermometer stellt auch hier das Messglied der Temperaturregelung dar. Die auf dieser Temperaturmessung basierende Regelung der Heizleistung ergibt bei gut eingestellten Regelparametern den in Abbildung 4.9 dargestellten Heizkurvenverlauf.

Zur Verbesserung des effektiven Emissionsgrades der Öffnung ist die innere Oberfläche des Kupferzylinders mit einem temperaturbeständigem Schwarzlack (Handelsname: Nextel-Velvet-Coating 811-21) beschichtet. V-förmige Vertiefungen mit einem Flankenwinkel von 60° und einer Periodizität von 2mm auf der Innenwandung, wie in Abbildung 4.8 dargestellt, erhöhen das Emissionsvermögen. Der effektive Emissionsgrad einer so bearbeiteten Oberfläche berechnet sich nach Psarouthakis [49] mit der folgenden Beziehung.

$$\frac{1}{\varepsilon_{eff}} = 1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \sin \left(\frac{\Theta}{2} \right) \quad (4.3)$$

Mit dem Emissionsgrad des Schwarzlacks $\varepsilon = 0,94$ und dem Flankenwinkel $\Theta = 60^\circ$ ergibt sich ein effektiver Emissionsgrad von $\varepsilon_{eff} = 0,969$. Der Emissionsgrad ε_s der

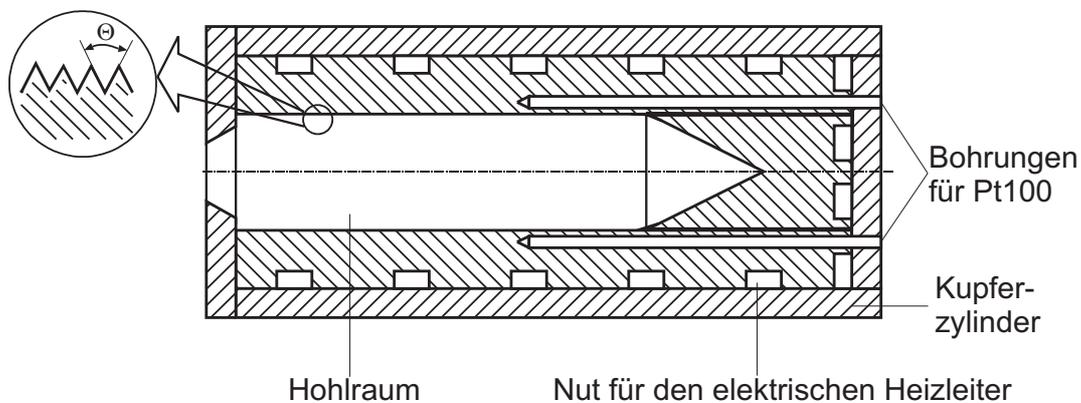


Abb. 4.8 Darstellung des verwendeten Kupferhohlraumes mit temperierbarer Wandung zur Realisierung eines schwarzen Referenzstrahlers

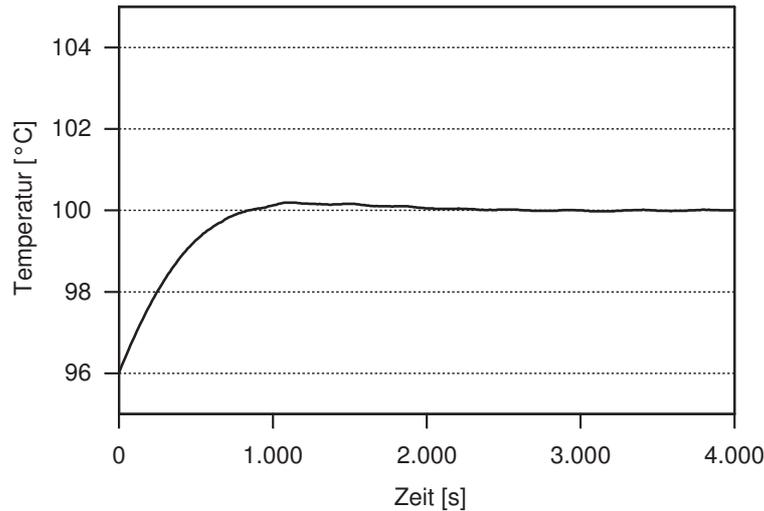


Abb. 4.9 Aufheizkurve des Hohlraumstrahlers

Öffnung des zylindrischen Hohlraums mit einer Länge von $l = 120$ mm und einem Radius der Öffnung von $r = 22,5$ mm lässt sich nach Bauer [3] berechnen zu

$$\varepsilon_s = 1 - \frac{1 - \varepsilon_{eff}}{1 + (l/r)^2} = 0,9989 . \quad (4.4)$$

4.2.3 Grundlagen zur FTIR-Spektrometrie

Der hier erfolgende Einschub der Grundlagen zur FTIR-Spektrometrie wird benötigt, um das wesentliche Messvermögen des verwendeten FTIR-Spektrometers zu beurteilen. Die Fourier-Transformations-Infrarot-Spektroskopie ist die momentan fortschrittlichste Methode der Infrarot-Spektroskopie. Sie ermöglicht nahezu gleichzeitige Intensitätsmessungen in einem weiten Frequenzbereich innerhalb des IR-Bandes.

Die Hauptkomponente eines FTIR-Spektrometers ist ein Interferometer. Seine Funktionsweise basiert auf dem in Abbildung 4.10 schematisch dargestellten Michelson-Interferometer. Es besteht im Wesentlichen aus einem Strahlteiler (ST), einem festen Spiegel (M1) und einem beweglichem Spiegel (M2). Die von einer thermischen Quelle emittierte breitbandige Infrarot-Strahlung fällt auf den Strahlteiler, der eine Hälfte der einfallenden Strahlung auf den feststehenden Spiegel reflektiert und die zweite Hälfte zum beweglichen Spiegel durchlässt. Der feststehende Spiegel hat einen Abstand S vom Strahlteiler. Die am festen Spiegel reflektierte Strahlung legt somit bis zum Wiederauftreffen auf den Strahlteiler einen Weg von $2S$ zurück. Die am beweglichen Spiegel reflektierte Strahlung hat dagegen eine Weglänge von $2(S + x_{sp})$. Hieraus ergibt sich bei der Rekombination der beiden Strahlhälften auf dem Strahlenteiler eine Wegdifferenz von $2x_{sp}$. Die beiden Strahlhälften interferieren miteinander, da sie räumlich kohärent sind. Diese durch das Interferometer modulierte Strahlung wird nach einer

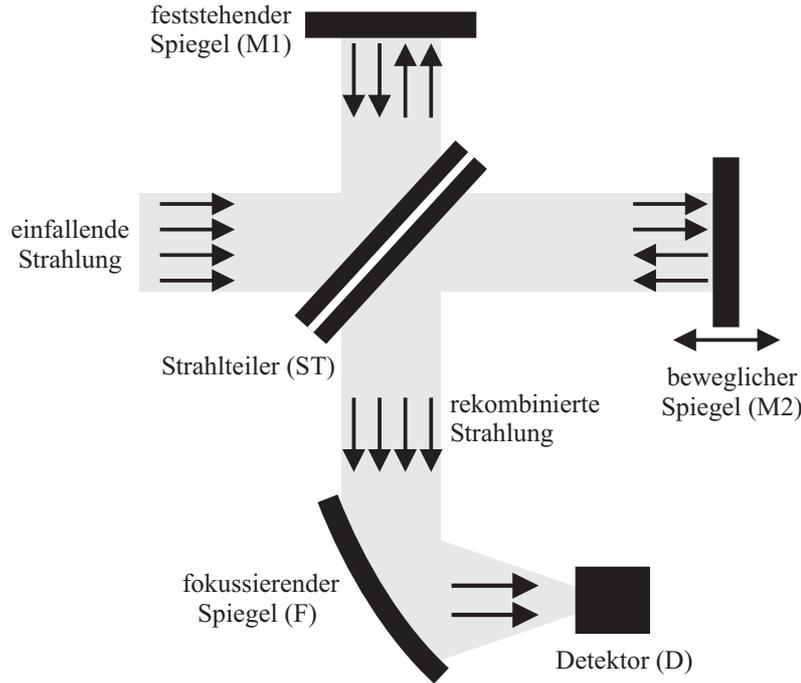


Abb. 4.10 Schema des Strahlungsverlaufs im Interferometer

Fokussierung (F) vom Detektor (D) erfasst. Die Intensität der Strahlung wird somit in Abhängigkeit von der Auslenkung x des beweglichen Spiegels gemessen. Ein solches Messsignal, wie in Abbildung 4.11 beispielhaft dargestellt, trägt die Bezeichnung Interferogramm und ist proportional zur Energie, die auf den Detektor einfällt. Die erfasste Intensität ergibt sich als Integral über der gesamten Bandbreite Bb der detektierten Wellenlängen

$$I(x) = \int_{Bb} I(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu . \quad (4.5)$$

Am Nullpunkt des Spiegelverstellwegs ($x = x_{sp} + 3500$), an dem beide Interferometerwege gleich lang sind, besitzen alle Wellen die Phasendifferenz Null und es findet eine maximale konstruktive Überlagerung, der sogenannte Center Burst, statt. Bei äquivalent aufgebauten Interferometerarmen sollte das Interferogramm der Theorie nach symmetrisch zum Nullpunkt des Spiegelwegs sein. In der Praxis ergeben sich jedoch die im Interferogramm sichtbaren Asymmetrien, da sich nie beide Interferometerarme völlig symmetrisch herstellen lassen und sich die verschiedenen Wellen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in den optischen Bauteilen ausbreiten.

Das Integral über die gesamte Bandbreite in Gleichung 4.5 kann auch als Integral über den unendlichen Wellenzahlbereich mit einer im Integral enthaltenen Fensterfunktion

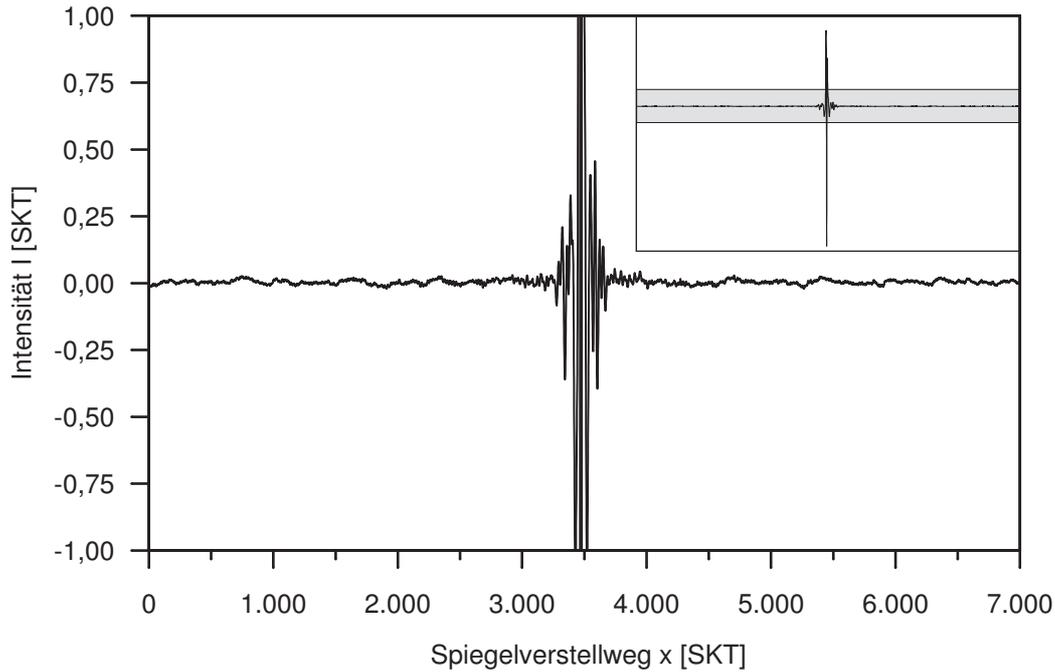


Abb. 4.11 Interferogramm

$F(\nu)$, die innerhalb der Bandbreite Eins und außerhalb Null ist, dargestellt werden.

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)F(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu \quad (4.6)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Fouriercosinustransformation. Bei geraden Funktionen $I(x) = I(-x)$ entspricht die inverse Fouriercosinustransformation der Fouriercosinustransformation. Mit dieser Relation und unter Anwendung des Faltungssatzes folgt für das Spektrum nach Griffiths und Haseth [23]

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x)F(x) \cos(2\pi\nu x) dx . \quad (4.7)$$

Ein solches wie in Abbildung 4.12 dargestelltes Spektrum ist allerdings nicht das Emissionsspektrum der untersuchten Probe, da es noch die Einflüsse der Messatmosphäre, der optischen Bauteile und der Auswerteelektronik beinhaltet. Zur Berücksichtigung dieser Einflüsse ist eine Kalibrierung, wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, notwendig. Die FTIR-Methode weist gegenüber der konventionellen IR-Spektroskopie einige im Rahmen dieser Arbeit wichtige Vorteile auf. Vor allem ist die zum Detektor geleitete Strahlungsintensität deutlich erhöht. Zum einen ist hierfür der Multiplex- oder Fellget-Vorteil verantwortlich. Ihn macht aus, dass alle von der IR-Quelle ausgesandten Frequenzen gleichzeitig und nicht nur ein geringer Teil ca. 0,1% der bei der konventionellen IR-Spektroskopie in den Monochromator eintretenden Strahlung auf den

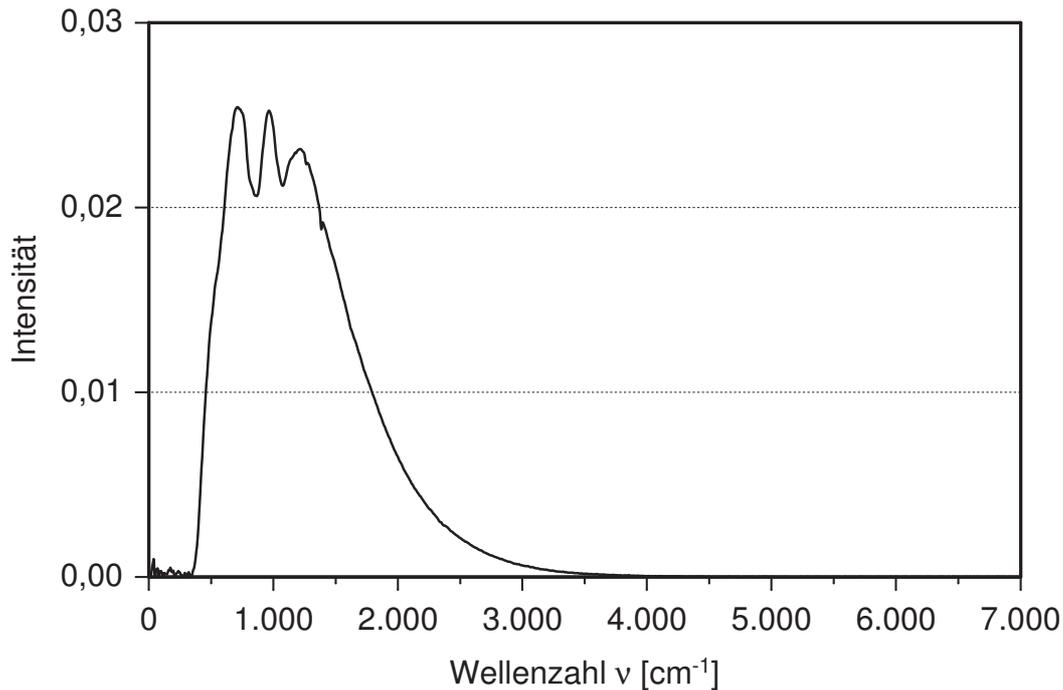


Abb. 4.12 Spektrum

Detektor treffen. Zum anderen ergibt sich durch die Verwendung kreisförmiger Blenden in FTIR-Spektrometern ein um mindestens den Faktor 6 größerer Strahlendurchsatz als durch die kleinere Fläche der linearen Spalte von Gittergeräten. Dieser so vergrößerte Strahlendurchsatz wird als Jacquinot-Vorteil bezeichnet.

Für die Messungen im Rahmen dieser Arbeit ist es außerdem von Bedeutung, direkte Vergleiche von IR-Spektren durchführen zu können. Die hierfür erforderliche hohe Wellenzahlgenauigkeit kann erzielt werden, da die Wellenzahlgenauigkeit direkt mit der Positionsbestimmung des bewegten Interferometerspiegels gekoppelt ist und diese mit Hilfe eines HeNe-Laser-Hilfsinterferometers auf besser als 6 nm möglich ist. Diese hohe Wellenzahlgenauigkeit wird als Connes-Vorteil bezeichnet.

Ein weiterer Vorteil ist eine kurze Messzeit, da bei den durchgeführten Messungen viele Spektren aufzuzeichnen sind. Die kurze Messzeit wird erreicht, da die Messdauer nur von der Geschwindigkeit der Spiegelverstellung abhängig ist und sich der Spiegel innerhalb von Sekundenbruchteilen verstellen lässt.

Die zur Berechnung des Spektrums notwendige Digitalisierung des Interferogramms bringt einige Nachteile. Ist die Abtastrate zu gering kommt es zum sogenannten Picket-Fence-Effekt, oder es tritt Aliasing auf. Beim Picket-Fence-Effekt werden Informationen die zwischen zwei Abtastpunkten liegen nicht wahrgenommen. Diese Informationen können nachträglich nur interpoliert werden. Beim Aliasing ergeben sich verfälschte Schwingungen (Alias) durch Unterabtastung, die im ursprünglichen Signal nicht ent-

halten sind. Die zeitliche begrenzte Messung führt dazu, dass nur ein Ausschnitt (Fenster) des Signals erfasst wird. Bei nicht kohärenter Abtastung ergeben sich hierdurch nach der Fouriertransformation zusätzliche Linien im Spektrum, die den Eindruck des Verlaufs der Frequenzteile vermittelt. Dieser Effekt wird als Leakage oder Leckeffekt bezeichnet. Die verwendeten Maßnahmen zur Reduzierung der Effekte der Digitalisierung in der genutzten Auswertung werden im folgenden Abschnitt erläutert.

Weitere Grundlagen zur FTIR-Spektroskopie werden von Griffiths [23], Bracewell [6] und Rahmelow [50] dargestellt.

4.2.4 Das verwendete FTIR-Spektrometer

Die von der Probe und dem Hohlraum emittierte Strahlung wird mit einem FTIR-Spektrometer mit dem Handelsnamen „Equinox 55“ der Firma Bruker Optic GmbH detektiert. Seine Funktionsweise basiert auf den Grundprinzipien der im vorherigen Abschnitt vorgestellten FTIR-Spektrometrie.

Das Spektrometer ermöglicht die Erfassung der Strahlungsleistung in einem großen Spektralbereich im mittleren Infrarot in unterschiedlichen Auflösungsstufen bis $0,5 \text{ cm}^{-1}$. Der erfassbare Wellenzahlbereich reicht von 7500 cm^{-1} bis 370 cm^{-1} mit einer Einstellgenauigkeit kleiner $0,01 \text{ cm}^{-1}$. Dieser Spektralbereich kann durch den Einsatz anderer Detektoren und Strahlenteiler auf 15500 cm^{-1} bis 50 cm^{-1} erweitert werden. Der verwendete Detektor ist ein pyroelektrischer, deuterierter, L-Alanin dotierter Triglycinsulfat (DLATGS) Kristalldetektor. Er zeichnet sich durch ein großes Signal-Rausch-Verhältnis größer 5000:1 aus. In Kombination mit dem KBr-Strahlenteiler mit Germanium-Beschichtung ist im genannten Spektralbereich die Strahlungsleistung rauscharm messbar.

Das Messsignal wird durch einen Zugang für externe Strahlung eingekoppelt. Es kann in unterschiedlichen Geschwindigkeiten spektral vermessen werden. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Messungen wurde eine Scan-Rate von 10 Spektren pro Sekunde bei einer Auflösung von 8 cm^{-1} genutzt.

Zur Erhöhung der Verwendbarkeitsdauer der stark hygroskopischen KBr-Bauteile und zur Reduzierung der Wasser- und Kohlendioxidabsorptionsbanden wird das gesamte Spektrometer und die Verbindung zur Vakuumkammer mit trockener Luft gespült. Hierzu wird Druckluft in einem Adsorptionstrockner der Firma „Specken & Drumag“ getrocknet, so daß die Taupunkttemperatur auf unter -50°C absinkt. Die Steuerung des Spektrometers und die Erfassung der Messergebnisse wird mit einem PC und der Betriebssoftware „Opus“ ermöglicht.

Eine Reduzierung des Leckeffekts erfolgt durch Multiplikation der Interferogrammdaten mit einer Apodisationsfunktion, die die zusätzlichen Linien im Spektrum abschwächt. Bei den durchgeführten Messungen wird hierfür eine 3-Term Blackman-

Harris Funktion genutzt. Zur Reduzierung des Picket-Fence-Effekts werden an beiden Enden des Interferogramms vor der Fourier-Transformation Nullen hinzugefügt. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Stützpunkte im Spektrum, was einer Interpolation entspricht. Dieses so genannte Zerofilling erhöht bei unseren Messungen die Anzahl der Stützstellen um den Faktor 2.

Eine weiterführende Beschreibung der Verwendung des Spektrometers erfolgt im nächsten Abschnitt über die Automatisierung des Versuchstandes.

4.2.5 Automatisierung der Anlage

Die Anforderungen an eine reproduzierbare, statische, radiometrische Messung des gerichteten, spektralen Emissionsgrads sind vielschichtig. Es ist notwendig die Probe immer wieder neu auszurichten und dann mehrere Messungen der Strahlungsleistung durchzuführen. Die zahlreichen Schritte und die Umgebungsparameter müssen dabei für alle Messungen identisch sein. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit durch eine umfassende Automatisierung der Messapparatur sichergestellt. Der Betrieb der gesamten Anlage wird mit einem PC gesteuert. Es ist daher notwendig das alle Funktionsteile des Versuchstandes über den PC ansteuerbar sind.

Der Steuerungscomputer ist wie in Abbildung 4.13 skizziert mit den Funktionselementen der Messanlage vernetzt. Die Temperaturregler, Badthermostaten und das Manometer sind über serielle RS232-Schnittstellen mit dem PC verbunden. Das zur Temperaturerfassung eingesetzte Multimeter ist über eine GPIB-Schnittstelle angeschlossen. Die Signalübermittlung der Drehgeber oder Endlagenschalter und die Ansteuerung der Spannungsversorgung der Drehmotoren erfolgt über eine mit dem PC verbundene AD-Wandlerbox der Firma National Instruments. Das FTIR-Spektrometer kommuniziert über eine zugehörige PCI-Karte mit dem PC.

Die zur Verwaltung der Anlage genutzte Hauptsoftware ist ein mit der Entwicklungsumgebung LabView der Firma National Instruments erstelltes Messprogramm. Es ermöglicht die Signalabfrage der einzelnen Schnittstellen und unterschiedlichen Geräte. Die einzelnen Messdaten werden gesammelt, sortiert und in das ASCII-Textformat umgewandelt. Die Messparameter, die den Zustand der Messapparatur dokumentieren sollen, werden zu Beginn jeder einzelnen Spektrometermessung in einer spaltenförmigen Textdatei gespeichert. Eine genauere Übersicht der erfassten Messparameter und ihrer Bedeutung wird in Abschnitt 4.3.1 gegeben.

Das Messprogramm initialisiert über die AD-Wandlerbox analoge und digitale Spannungssignale zur Steuerung der Stromversorgung und der Drehrichtung der eingesetzten Stabankermotoren. Das analoge Signal aktiviert die Stromversorgung, während mittels der digitalen Signale im Schaltkasten Relais so geschaltet werden, das der ausgewählte Motor mit der der gewünschten Drehrichtung entsprechenden Spannungspolarisierung

versorgt wird. Die Bewegung des Probenschwenktisches wird von den strichcodierten Drehgebern erfasst. Die verwendeten Drehgeber haben eine Einteilung von 2048 Strichmarkierungen pro Umdrehung. Jede Bewegung um eine Strichmarkierung sendet einen elektrischen Impuls aus. Diese Impulse werden mittels der AD-Wandlerbox gezählt und erlauben somit die Feststellung der Winkellage mit einer Auflösung von

$$\varpi = \frac{360^\circ}{2048} = 0,1758^\circ . \quad (4.8)$$

Die Endlage des Probenschwenktisches bei $\vartheta = 0^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$ werden durch Umschaltung der dort befindlichen Mikroschalter über die AD-Wandlerbox erfasst. Auf die gleiche Weise wird auch das Erreichen der Endlagen des Schwenkspiegels an den

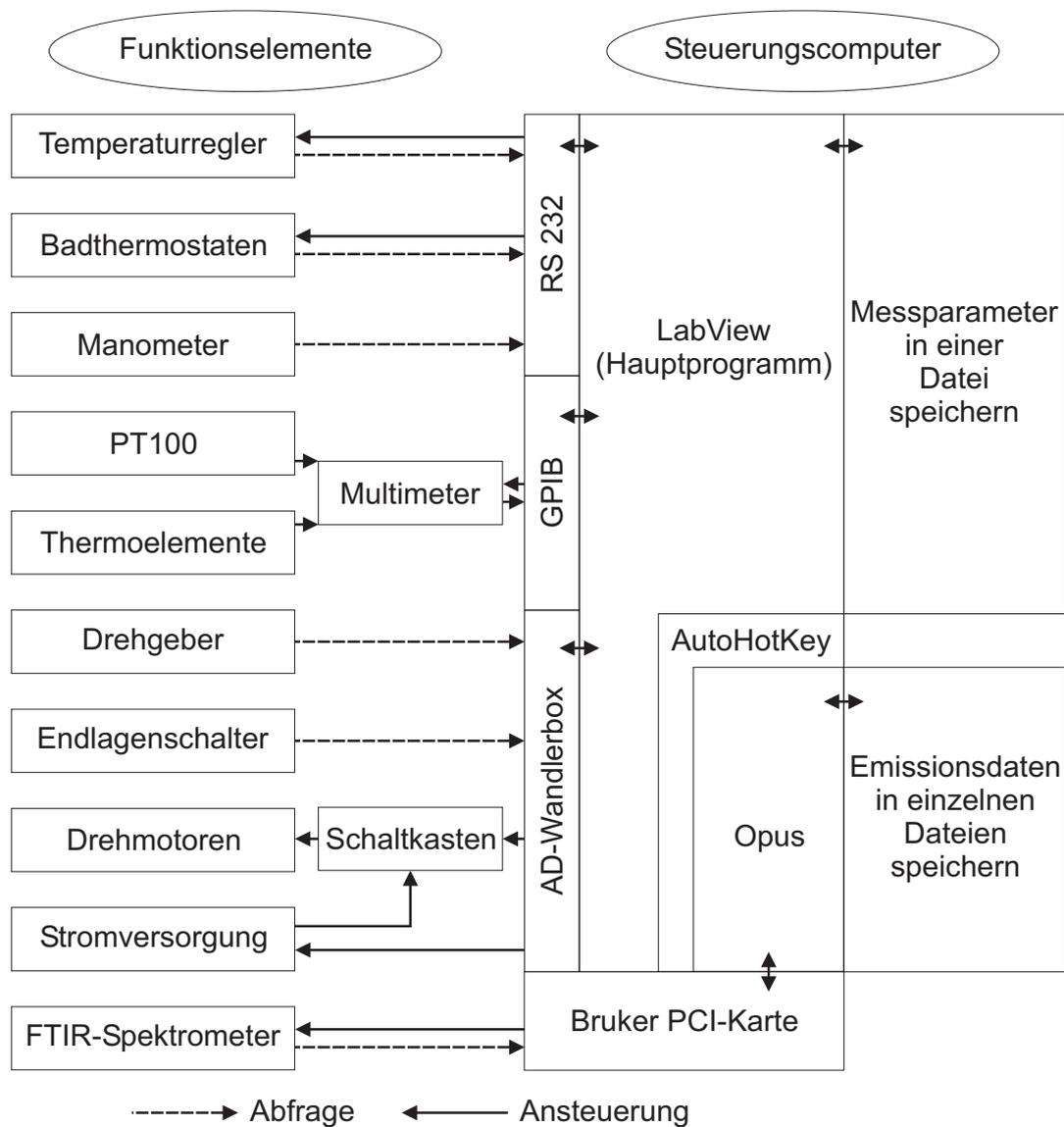


Abb. 4.13 Schematische Darstellung der Automatisierungskomponenten

Steuerungscomputer übermittelt. Die Endlagenpositionen werden somit ohne Abweichung exakt angefahren und im Messprogramm registriert.

Die Nutzung und Ansteuerung des FTIR-Spektrometers erfolgt über die zugehörige PCI-Karte und die Betriebssoftware Opus. Die automatisierte Spektrenvermessung wird durch das Messprogramm unter Verwendung eines AutoHotKey-Programms gestartet. Die Simulation einer Tastaturbedienung über die AutoHotKey-Software erlaubt die Einbindung des FTIR-Spektrometers in die LabView-Automatisierungsumgebung ohne das ein für LabView geeigneter Treiber benötigt wird. Die Vermessung eines Spektrums stellt einen Modulbaustein dar. Dieses Modul wird je nach Anzahl der eingestellten Messwiederholungen wiederholt aufgerufen. Jede einzelne Spektrenmessung wird dabei mit der Speicherung der Emissionsdaten in einer jeweils neuen Datei abgeschlossen.

Die Automatisierung stellt nicht nur die Konstanz und die Überwachung der Messparameter sicher, sondern minimiert die Messzeiten von umfangreichen Messungen deutlich. Eine vollständige Messung des gerichteten, spektralen Emissionsgrades für eine Oberflächentemperatur benötigt bei manuellem Betrieb der Anlage 14 Tage. Die Automatisierung bewirkt eine Reduzierung der benötigten Messzeit auf 4 Tage. Die automatisierte Messapparatur ermöglicht die Realisierung umfangreicher Studien zur Reproduzierbarkeit der Messungen und zum Einfluss der Umgebungsparameter. Aufgrund der Reduzierung des Zeitbedarfs ist es möglich die Anzahl der Messwiederholungen zu erhöhen. Eine sinnvolle Beurteilung der Messunsicherheit aufgrund zufälliger Fehler wird somit erst ermöglicht.

4.3 Das Messverfahren

Der folgende Abschnitt erläutert das realisierte Verfahren zur statischen, radiometrischen Messung von Emissionsgraden. Die Messmethode beruht auf dem Vergleich der Strahlungsleistung der untersuchten Probe mit der eines schwarzen Strahlers bei identischer Temperatur. Es wird beschrieben welche Messwerte aufgenommen werden und welche Bedeutung sie haben. Der anschließend dargestellte Kalibriervorgang ermöglicht erst die Angabe korrekter Messwerte. Die Bestimmung der Oberflächentemperatur wird näher erläutert, da sie eine der größten Fehlerquellen dieses Messverfahrens darstellt. Eine Betrachtung der Messunsicherheit ermöglicht schließlich die Angabe von Messergebnissen. Abschließend wird der innerhalb einer MatLab-Umgebung realisierte Ablauf der Messwertauswertung dargestellt.

4.3.1 Die Messwertaufnahme

Zur statischen, radiometrischen Messung des gerichteten spektralen Emissionsgrades werden spektral- und winkelaufgelöste Messwerte zur Strahldichte benötigt. Hierzu

werden im Rahmen dieser Arbeit Ausstrahlungsspektren eines Probenstrahlers unter verschiedenen Polar- und Azimutwinkeln gemessen. Die Messungen erfolgen mit einer Winkelauflösung von 5° für die Polar- und Azimutwinkel. Der vermessene Polarwinkelbereich reicht dabei von 0° bis 70° . Der Azimutwinkelbereich beträgt 0° bis 90° . Die jeweiligen Spektren werden mit dem FTIR-Spektrometer mit einer Wellenzahlauflösung von 8 cm^{-1} vermessen.

Zur Messung der Probenausstrahlung wird der Probenhalter temperiert und der jeweilige zu untersuchende Raumwinkel angefahren. Hierauf folgt die Überprüfung der Temperierung der Probenkammer und der Messgerätekammer. Eine positive Temperierungsprüfung ergibt sich, wenn die Messwerte der Temperaturen innerhalb der letzten viertel Stunde weniger als $0,05 \text{ K}$ geschwankt haben. Neben der Prüfung der Konstanz der Temperaturen wird geprüft, ob die Messtemperatur erreicht ist. Der Mittelwert der Proben temperatur für die letzte viertel Stunde darf nicht mehr als $0,025 \text{ K}$ von der vorgegebenen Messtemperatur abweichen.

Nach der positiven Temperierungsprüfung erfolgt die Messung des Ausstrahlungsspektrums mit dem FTIR-Spektrometer. Für jede Winkelposition wird dabei die FTIR-Spektrometermessung 5 mal wiederholt. Die gemessenen Spektren werden zur späteren Auswertung in einer Textdatei gespeichert. Die Datei enthält die Wellenzahlen, bei denen gemessen wird, mit den entsprechenden Intensitätsmesswerten. Zur Auswertung der jeweiligen Spektrenmessungen werden neben den Spektren alle gemessenen Größen abgespeichert. Ein Großteil der Messgrößen sind Temperaturen. Es werden die Temperaturen der Probe, des Schwarzkörpers, der Probenkammer und der Messgerätekammer inklusive der FTIR-Spektrometertemperatur aufgezeichnet. Weitere gespeicherte Größen sind die eingestellten Polar- und Azimutwinkel, die Schwenkspiegelstellung, der Messzeitpunkt, die eingebrachten Heizleistungen und der Druck in der Probenkammer. Für jede Spektrenmessung erfolgt die Temperierungsprüfung und die Abspeicherung der Messdaten. Bei einer Winkelauflösung von 5° ergeben sich somit für die Vermessung einer Oberfläche bei einer Temperatur 1425 Messdatensätze.

Nach der Messung der Probenspektren erfolgt die Temperierung des Hohlraumstrahlers. Da die Oberflächentemperatur der Probe unterhalb der gemessenen Probenheizungstemperatur liegt, wird der Hohlraumstrahler in 2 K Schritten auf 10 Temperaturen unterhalb der Probenheizungstemperatur temperiert. Nach dem Erreichen einer Temperaturstufe und der Überprüfung der Temperierung werden jeweils 5 Spektren gemessen. Die 50 Spektren und die jeweils gemessenen Umgebungsparameter werden für die spätere Auswertung in Textdateien gespeichert.

Für die im nächsten Abschnitt beschriebene Kalibrierung werden außerdem noch 5 Spektren des Hohlraumstrahlers bei einer niedrigen Temperatur von 100°C und einer hohen Temperatur von 200°C gemessen und gespeichert.

Die große Anzahl der gespeicherten Daten macht zum Abschluss des Messverfahrens die automatische Auswertung, wie sie in Abschnitt 4.3.5 beschrieben wird, unumgänglich.

4.3.2 Die Kalibrierung

Die FTIR-Spektrometrie wird häufig für Absorptionsmessungen zur Bestimmung von stoffspezifischen Absorptionsbanden genutzt. Es werden dabei Spektren der Messstrecke mit und ohne Probe verglichen. Bei den Messungen der emittierten Strahlungsintensität werden keine vergleichenden Messungen durchgeführt, da das Leistungsspektrum der emittierten Strahlung das Messergebnis ist. Die gemessenen Intensitäten sind die direkte Messgröße.

Die Kalibrierung der Messstrecke wird einerseits genutzt um verfälschende Einflüsse auf das gemessene Spektrum zu ermitteln und zu berücksichtigen. Andererseits ermöglicht sie die Zuordnung von physikalisch verständlichen Einheiten zu den vom Spektrometer in arbiträren Maschineneinheiten ausgegebenen Messgrößen.

Das gemessene Spektrum $S(\lambda)$ wird durch die in Abbildung 4.14 dargestellten Faktoren beeinflusst. Zusätzlich zu der von dem jeweiligen Versuchskörper emittierten Strahlung $L(\lambda)$ wird auch die vorhandene Hintergrundstrahlung detektiert. Diese Hintergrundstrahlung wird von allen Bauteilen der Versuchsanlage ausgestrahlt. Ihr Anteil am gemessenen Spektrum wird durch die Kühlung der beiden Anlagenkammern möglichst gering gehalten. Außerdem erfasst eine FTIR-Spektrometermessung nur den Netto-Strahlungsaustausch zwischen dem Detektor und der Probe. Das detektierte Spektrum stellt nicht die absolut emittierte Strahlung dar, sondern enthält Informationen zur emittierten Strahlung der Probe $L(\lambda)$ und dem Strahlungsaustausch der Probe und des Detektors. Da der Strahlungsaustausch und die Hintergrundstrahlung, die nur sehr gering ist und minimal erfasst wird, additiv auf das Messsignal einwirken, werden sie in dieser Arbeit zusammengefasst als Strahlungsaustausch $G(\lambda)$ bezeichnet.

Zum anderen beeinflussen die Messatmosphäre, die optischen Bauelemente und die eingesetzte Auswertelektronik das gemessene Spektrum. Diese Einflussfaktoren werden zusammengefasst als die multiplikative Systemantwort $R(\lambda)$ berücksichtigt. Das gemessene

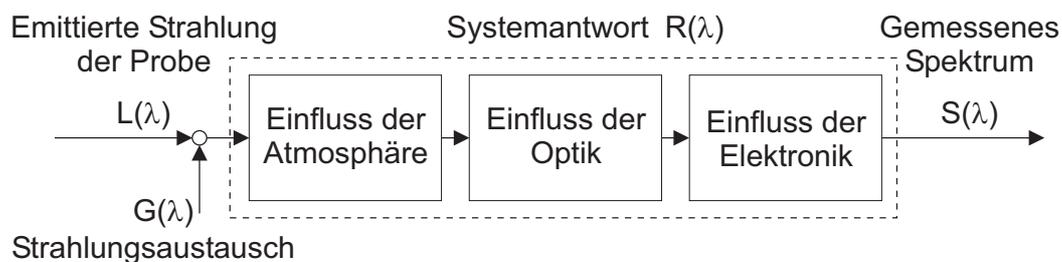


Abb. 4.14 Das gemessene Spektrum beeinflussende Größen

sene Spektrum $S(\lambda)$ lässt sich demzufolge unter Berücksichtigung des Strahlungsaustausches $G(\lambda)$ und der Systemantwort $R(\lambda)$ mit der folgenden Gleichung beschreiben.

$$S(\lambda) = R(\lambda) [L(\lambda) + G(\lambda)] \quad (4.9)$$

Für die Bestimmung des Emissionsgrades wird jedoch nicht das gemessene Spektrum $S(\lambda)$ benötigt, sondern die emittierte Strahlung der Probe $L(\lambda)$. Bei bekanntem Strahlungsaustausch $G(\lambda)$ und bekannter Systemantwort $R(\lambda)$ kann nach Auflösen von Gleichung 4.9 diese emittierte Strahlung der Probe $L(\lambda)$ bestimmt werden.

$$L(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{R(\lambda)} - G(\lambda) \quad (4.10)$$

Das Ziel der Kalibrierung ist es daher die Systemantwort $R(\lambda)$ und den Strahlungsaustausch $G(\lambda)$ zu ermitteln. Hierzu werden die die Spektren S_1 und S_2 des Hohlraumstrahlers bei zwei unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 gemessen. Die emittierte Strahlung des Hohlraumstrahlers entspricht der Ausstrahlung eines Schwarzen Körpers und wird nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz (Gl. 2.1) für die Temperaturen T_1 und T_2 zu $L_{s1}(\lambda)$ und $L_{s2}(\lambda)$ berechnet. Für die gemessenen Spektren des Hohlraumstrahlers $S_1(\lambda)$ und $S_2(\lambda)$ ergibt sich somit folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= R(\lambda) [L_{s1}(\lambda) + G(\lambda)] \\ S_2(\lambda) &= R(\lambda) [L_{s2}(\lambda) + G(\lambda)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems bestehend aus zwei linearunabhängigen Gleichungen werden die beiden unbekannt Variablen der Strahlungsaustausch $G(\lambda)$ und die Systemantwort $R(\lambda)$ ermittelt. Die Lösung des Gleichungssystems liefert die folgenden Gleichungen für $G(\lambda)$ und $R(\lambda)$.

$$G(\lambda) = \frac{S_1(\lambda)}{R(\lambda)} - L_{s1}(\lambda) \quad (4.12)$$

$$R(\lambda) = \frac{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)}{L_{s1}(\lambda) - L_{s2}(\lambda)} \quad (4.13)$$

Das Vorgehen der Kalibrierung beruht auf der Annahme, dass für jede Wellenlänge eine lineare Kalibrierfunktion anzuwenden ist. Zur Überprüfung dieser Annahme wird das Ausstrahlungsspektrum des Hohlraumstrahlers bei unterschiedlichen Temperaturen gemessen. Bei einer Spektrometertemperatur von 283,15 K wird der Hohlraumstrahler in 10 K Schritten von 303,15 K bis 473,15 K aufgeheizt und vermessen. Für die jeweiligen Messtemperaturen werden anschließend die jeweiligen spektralen Strahldichten nach dem Planckschen Strahlungsgesetz (Gl. 2.1) berechnet. Da die gemessenen Ausstrahlungsspektren den berechneten Größen entsprechen, lässt sich jedem Messwert eine

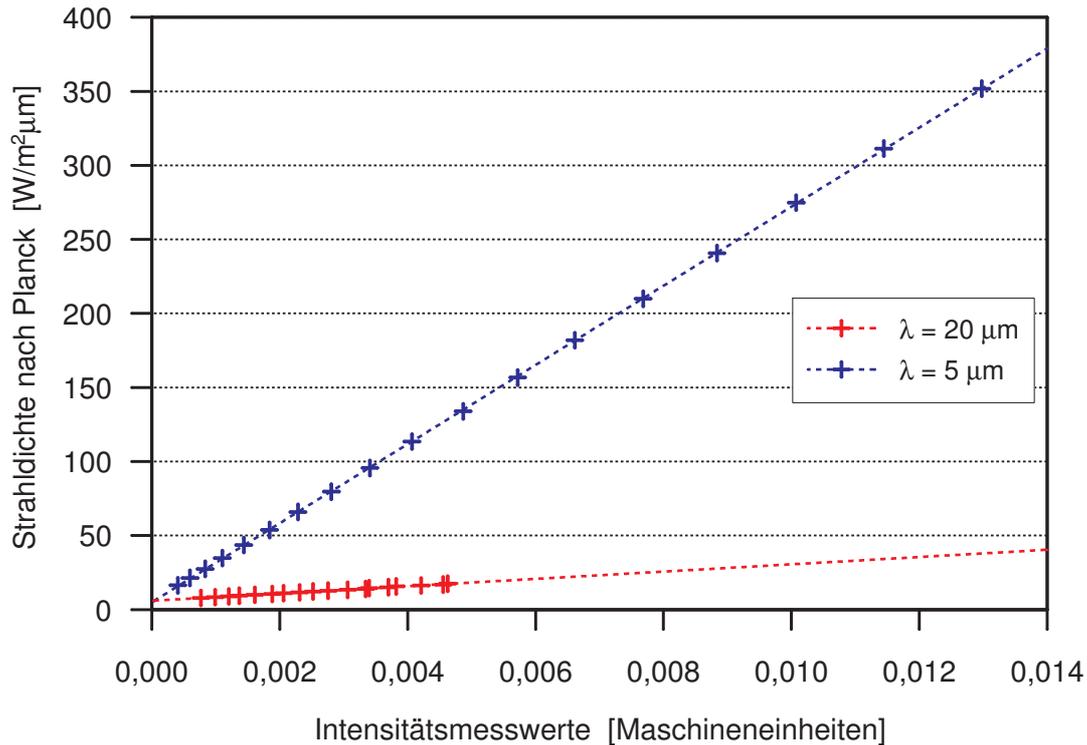


Abb. 4.15 Überprüfung der Linearität der Kalibrierung

spektrale Strahldichte zuordnen. In Abbildung 4.15 ist für 2 Wellenlängen diese Zuordnung aufgetragen. Die blauen Kreuze stellen die Zuordnung und die blaue Gerade die Kalibrierfunktion bei einer Wellenlänge von $5 \mu\text{m}$ dar. Die roten Werte bilden die Kalibrierfunktion und die Zuordnung für eine Wellenlänge von $20 \mu\text{m}$ ab. Die Ordinatenschnittpunkte unterscheiden sich deutlich für die unterschiedlichen Wellenlängen. Diese verschiedenen Schnittpunkte geben den Verlauf der Strahlungsaustauschfunktion $G(\lambda)$ wieder. Die jeweiligen Steigungen der gestrichelten Geraden in Abbildung 4.15 repräsentieren die Werte der Systemantwort $R(\lambda)$. Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Kalibrierfunktion zur Kalibrierung der Anlage geeignet ist.

Die Abbildung 4.16 zeigt den Verlauf der Systemantwortsfunktion $R(\lambda)$. Es ist zu sehen, dass für kleine Wellenlängen bis $12 \mu\text{m}$ nur eine geringe Verstärkung notwendig ist. Für Wellenlängen oberhalb von $12 \mu\text{m}$ ist eine deutlichere Verstärkung notwendig. Das Messsystem weist also eine spektral unterschiedliche Detektionsempfindlichkeit auf.

Der Verlauf der Strahlungsaustauschfunktion $G(\lambda)$ ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Hierbei ist zu beachten, dass das FTIR-Spektrometer nur den Netto-Strahlungsaustausch detektieren kann. Der Detektor selbst strahlt dabei näherungsweise wie ein Schwarzkörperstrahler. Unter Beachtung von Gleichung 4.10 wird damit der negative Verlauf der Strahlungsaustauschfunktion $G(\lambda)$ verständlich. Zur Überprüfung dieser Aussage werden in Abbildung 4.18 die Absolutwerte von $G(\lambda)$ mit nach dem Planckschen Strah-

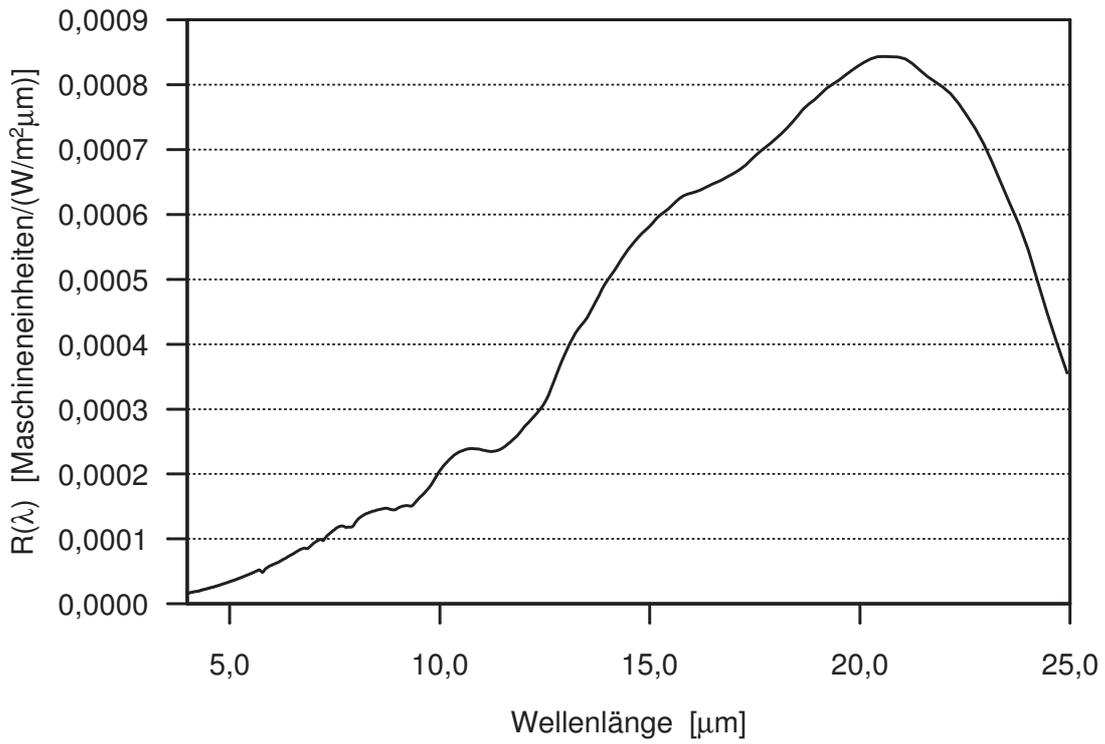


Abb. 4.16 Systemantwort der Messstrecke $R(\lambda)$

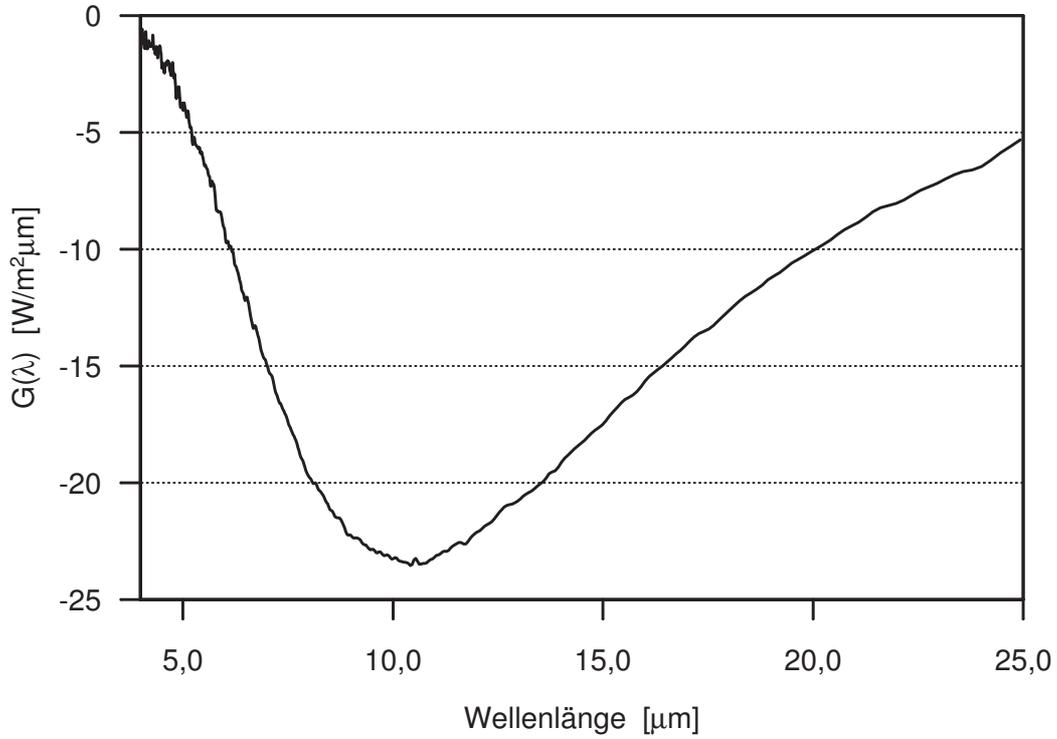


Abb. 4.17 Strahlungsaustauschfunktion $G(\lambda)$

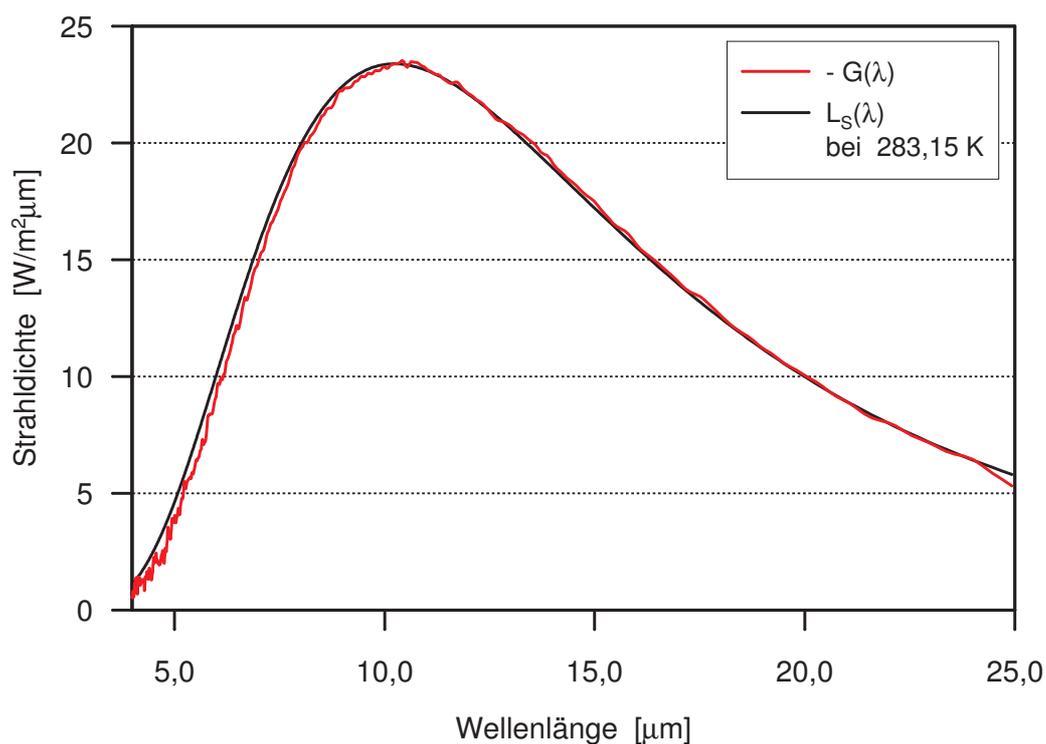


Abb. 4.18 Vergleich von $G(\lambda)$ mit einer berechneten Schwarzkörperstrahlung bei $283,15\text{ K}$

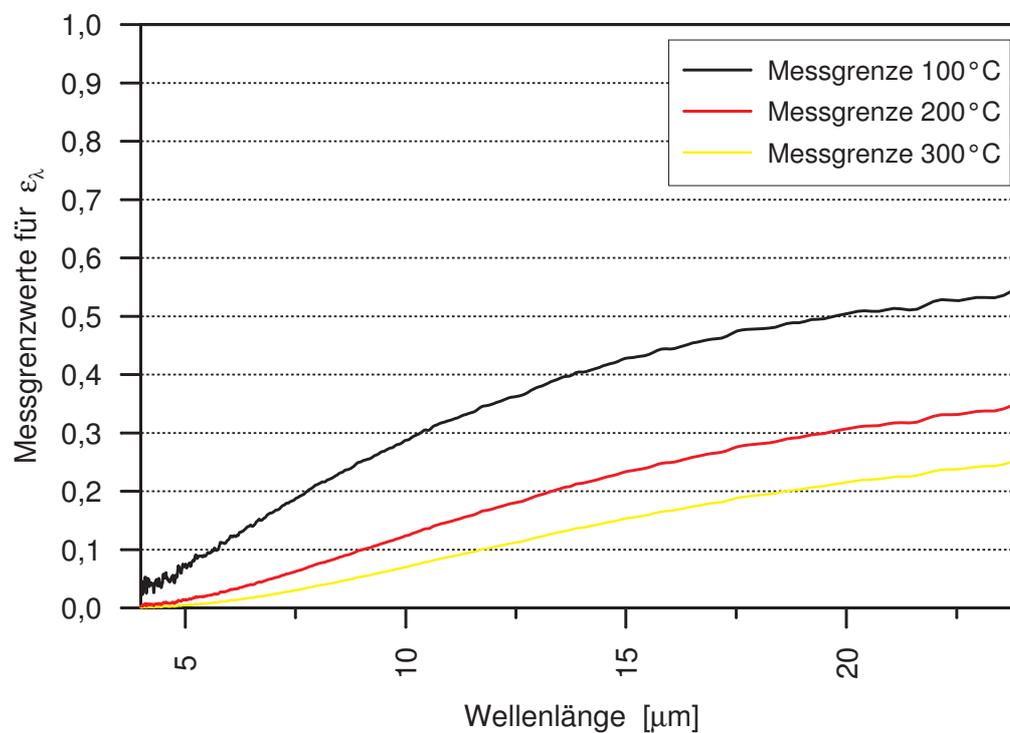


Abb. 4.19 Messgrenzen der Versuchsanlage für verschiedene Probenoberflächentemperaturen

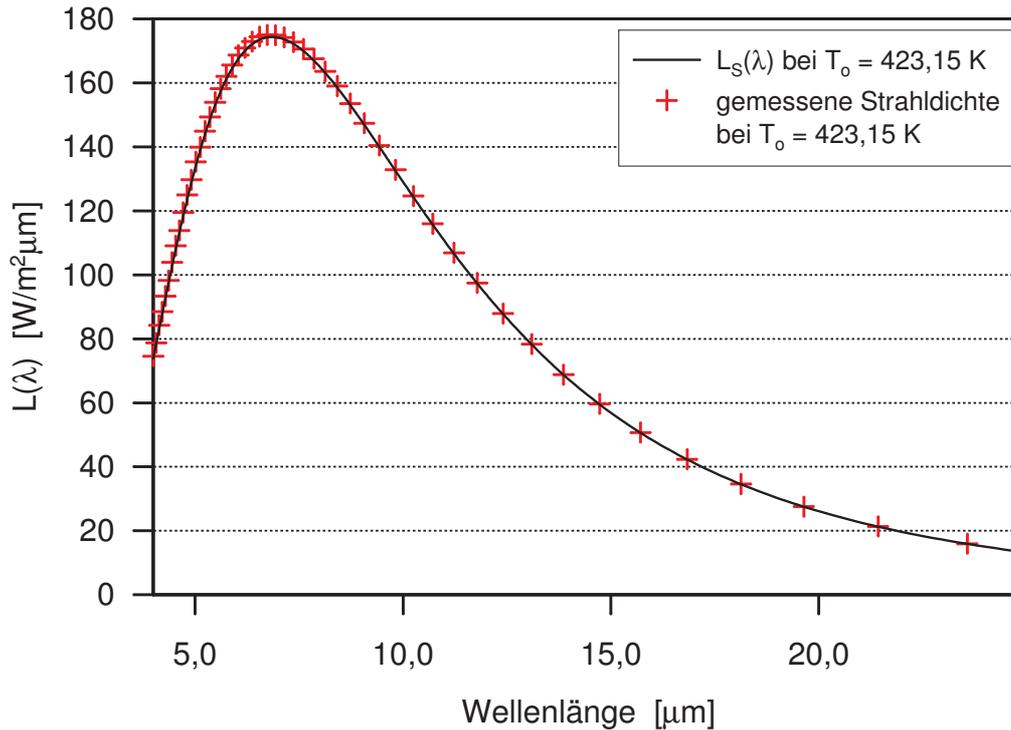


Abb. 4.20 Vergleich der gemessenen spektralen Strahldichte des Hohlraumstrahlers und der berechneten spektralen Strahldichte für eine Temperatur von 423,15 K

lungsgesetz berechneten Werten für die Detektortemperatur von 283,15 K verglichen. Es ist deutlich die gute Übereinstimmung der Kurven zu erkennen. Die leichten Abweichungen resultieren aus der Hintergrundstrahlung und dem nur angenäherten Schwarzkörperverhalten des Detektors.

Aus den Betrachtungen zur Kalibrierung der Messstrecke lassen sich Messgrenzen für das System ableiten. Durch die Kalibrierung wird nur ein positiver Strahlungsfluss von der Probe an den Detektor korrekt erfasst. Hieraus folgt das die Absolutwerte von $G(\lambda)$ die geringst messbaren Strahldichtewerte bei der jeweiligen Wellenlänge darstellen. Zur Angabe der messbaren spektralen Emissionsgrade teilt man die Absolutwerte von $G(\lambda)$ durch die Schwarzkörperstrahldichten bei den jeweiligen Oberflächentemperaturen der Probe.

$$\varepsilon_{\lambda}^{\text{Grenz}}(\lambda, T_o) = \frac{|G(\lambda)|}{L_{\lambda,s}(\lambda, T_o)} \quad (4.14)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich nun entsprechend der jeweiligen Oberflächentemperatur Messgrenzen für die Bestimmung von Emissionsgraden mit dem verwendeten Messaufbau ermitteln. Die Messgrenzen für Oberflächentemperaturen von 100°C, 200°C und 300°C sind in Abbildung 4.19 dargestellt.

Zur abschließenden Überprüfung der Kalibrierung wird die Ausstrahlung des Hohlraumstrahlers bei 150°C gemessen und mit Rechenwerten nach Planck verglichen. Hier-

zu wird die Messstrecke mit Messwerten bei 100°C und 200°C kalibriert. In Abbildung 4.20 ist die gute Qualität der Kalibrierung zu sehen. Die Messwerte und berechneten Werte sind fast identisch.

4.3.3 Die Bestimmung der Oberflächentemperatur

Das Messverfahren basiert auf dem Vergleich der Strahldichten eines Hohlraumstrahlers und der Probenoberfläche bei gleicher Temperatur. Die exakte Ermittlung der Oberflächentemperatur ist daher von zentraler Bedeutung. Die Oberflächentemperatur wird nicht direkt gemessen. Mögliche Messsensoren auf der Oberfläche würden die Messwerte beeinflussen. Daher wird die Oberflächentemperatur durch eine Energiebilanz und mehrere Emissiongradmessungen bestimmt.

In Abbildung 4.21 sind alle berücksichtigten Parameter zur Bilanzierung der Energieströme der Probe dargestellt. Es wird eine Temperatur T_m gemessen. Die Temperaturmessstelle ist für Proben mit entsprechender Dicke im Probenkörper eingebaut. Bei zu dünnen Proben $\delta_p < 5$ mm wird die Temperatur T_m im Probenheizungsblock gemessen. Dies ist der in Abbildung 4.21 dargestellte Fall. Die Wärmeabstrahlung am Rand der Probenheizung und am Rand der Probe werden vernachlässigt. Die abgestrahlte Wärme ist sehr gering, da die Flächen klein sind und die Probenheizung verchromt ist. Die Verchromung sorgt dabei für einen geringen hemisphärischen Gesamtemissionsgrad von 0,07. Die Wärmeableitung über die Probeneinspannung kann vernachlässigt werden, da sie durch geringe Leitungsflächen und schlecht wärmeleitende Materialien gering gehalten wird. Außerdem wirkt die Einspannung nur in einem kleinen Bereich von ca. 1 cm vom Rand auf die Oberflächentemperatur. Der Einflussbereich liegt somit

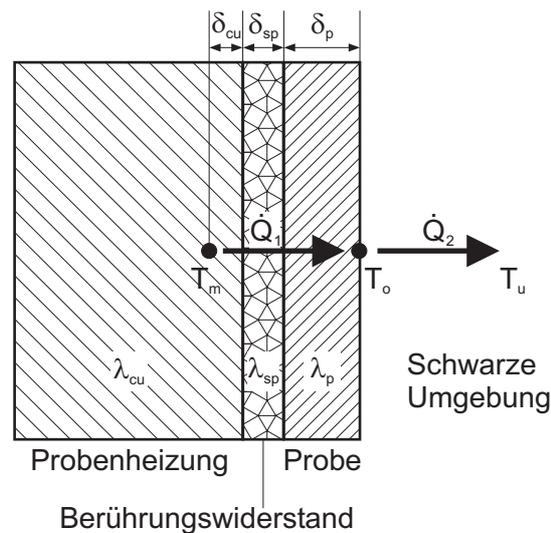


Abb. 4.21 Berücksichtigte Größen bei der Energiebilanz zur Bestimmung der Oberflächentemperatur

nicht im Messbereich. Eine Berücksichtigung konvektiver Wärmeströme erfolgt nicht. Die möglichen konvektiven Wärmeströme werden durch die ausreichende Evakuierung der Probenkammer sehr stark reduziert.

Die in Abbildung 4.22 dargestellte Reduzierung der Konvektion mit dem Druck p bestätigt die Annahme einer vernachlässigbaren Konvektion, da bei einem Druck $p_{mess} < 0,5 \text{ Pa}$ gemessen wird. Mit diesen Annahmen ergibt sich die Energiebilanz für das stationäre, offene System aus Abbildung 4.21 zu

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 . \quad (4.15)$$

Hierbei wird der Wärmestrom \dot{Q}_1 , der durch Wärmeleitung von der Messstelle an die Probenoberfläche entsteht, berücksichtigt.

$$\dot{Q}_1 = k A (T_m - T_o) \quad (4.16)$$

Der mittlere Wärmedurchgangskoeffizient k auf die Fläche A bezogen ergibt sich aus der Reihenschaltung der Wärmeleitungswiderstände der Probenheizung, des Spalts und der Probe.

$$\frac{1}{k A} = \frac{\delta_{cu}}{\lambda_{cu} A} + \frac{\delta_{sp}}{\lambda_{sp} A} + \frac{\delta_p}{\lambda_p A} \quad (4.17)$$

Der Wärmeleitungswiderstand des Spaltes erfasst dabei den Wärmeübergang durch Leitung und Strahlung an der Berührfläche. Der Wert dieses Wärmeleitungswiderstandes wird in Vorversuchen ermittelt. In diesen Vorversuchen wird eine weitere Temperatur der Probe T_p gemessen. Bei dicken Proben innerhalb der Probe und bei dünnen Proben an der Oberfläche. Mit diesem Temperaturmesswert und der ebenfalls gemessenen Heizleistung \dot{Q}_{Heiz} kann ein entsprechender Wärmeleitungswiderstand für den Berührungspalt gemäß folgender Gleichung berechnet werden.

$$\frac{\delta_{sp}}{\lambda_{sp} A} = \frac{(T_m - T_p)}{\dot{Q}_{Heiz}} - \frac{\delta_{cu}}{\lambda_{cu} A} - \frac{\delta_p}{\lambda_p A} \quad (4.18)$$

Der zweite berücksichtigte Wärmestrom \dot{Q}_2 ist der Wärmestrahlungsstrom von der Probenoberfläche an die in guter Näherung als Schwarzer Körper angenommene Umgebung. Er lässt sich berechnen zu

$$\dot{Q}_2 = \varepsilon A \sigma (T_o^4 - T_u^4) . \quad (4.19)$$

In Gleichung 4.15 werden die Terme aus den Gleichungen 4.16 und 4.19 eingesetzt. Eine abschließende Umformung ergibt für den berechneten hemisphärischen Gesamtemissionsgrad in Abhängigkeit von der Oberflächentemperatur T_o den Ausdruck

$$\varepsilon_{ber}(T_o) = \frac{T_m - T_o}{\left(\frac{\delta_{cu}}{\lambda_{cu}} + \frac{\delta_{sp}}{\lambda_{sp}} + \frac{\delta_p}{\lambda_p} \right) \sigma (T_o^4 - T_u^4)} . \quad (4.20)$$

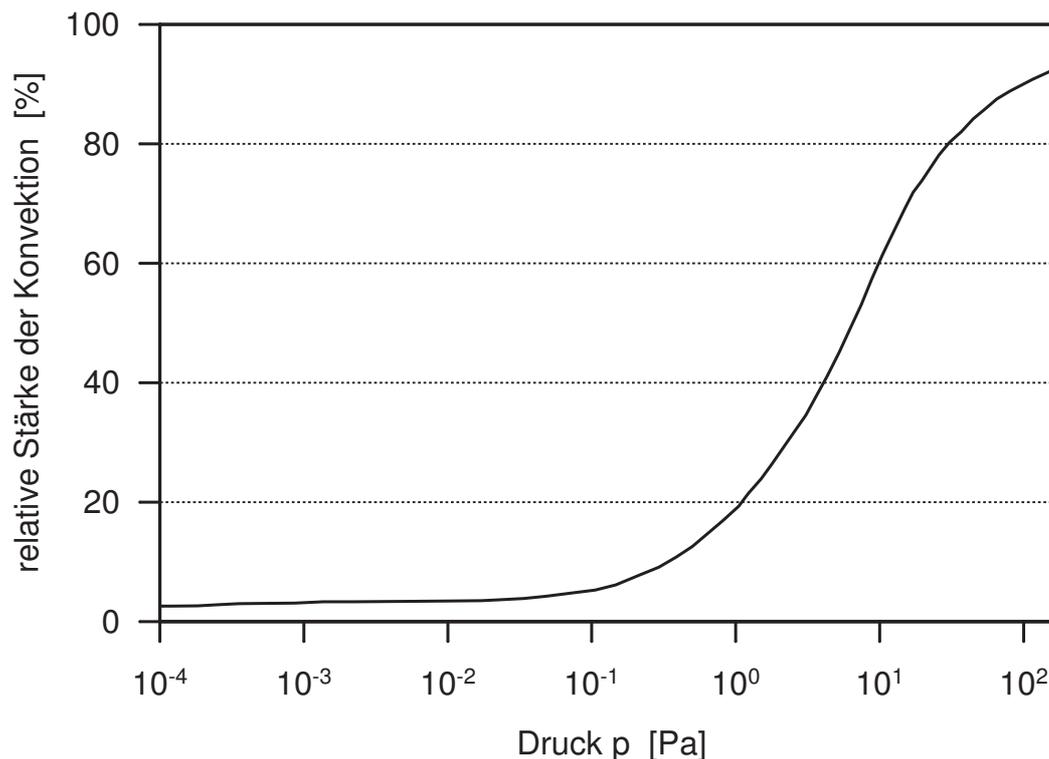


Abb. 4.22 Prinzipielle Abnahme der Konvektion mit dem Druck p . Dargestellt ist der Quotient aus dem konvektiven Wärmestrom bei dem Druck p und dem konvektiven Wärmestrom bei einem Druck von 1 bar nach Reiss [52].

Zur Bestimmung der Oberflächentemperatur muss noch eine zweite Gleichung für den hemisphärischen Gesamtemissionsgrad in Abhängigkeit von T_o aufgestellt werden. Sie wird aus den Messwerten der Ausstrahlung der Probe und des Hohlraumstrahlers gewonnen. Die Probe wird einmal temperiert und vermessen. Der Hohlraumstrahler wird auf mehrere Temperaturen im Bereich der erwarteten Oberflächentemperatur temperiert und gemessen. Für jede Temperatur des Hohlraumstrahlers erhält man so einen hemisphärischen Gesamtemissionsgrad. An diese Messwerte wird mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Geradengleichung angepasst. Diese Gerade liefert den gemessenen hemisphärischen Gesamtemissionsgrad in Abhängigkeit von der angenommenen Oberflächentemperatur $\varepsilon_{mess}(T_o)$. Die Funktionsverläufe des berechneten und des gemessenen hemisphärischen Gesamtemissionsgrades sind in Abbildung 4.23 aufgezeichnet. Eine Schnittpunktsbestimmung durch Gleichsetzen der Funktionen für $\varepsilon_{ber}(T_o)$ und $\varepsilon_{mess}(T_o)$ ermöglicht die Bestimmung der Oberflächentemperatur.

$$\varepsilon_m(T_o) = \varepsilon_{ber}(T_o) \quad \Rightarrow \quad T_o \quad (4.21)$$

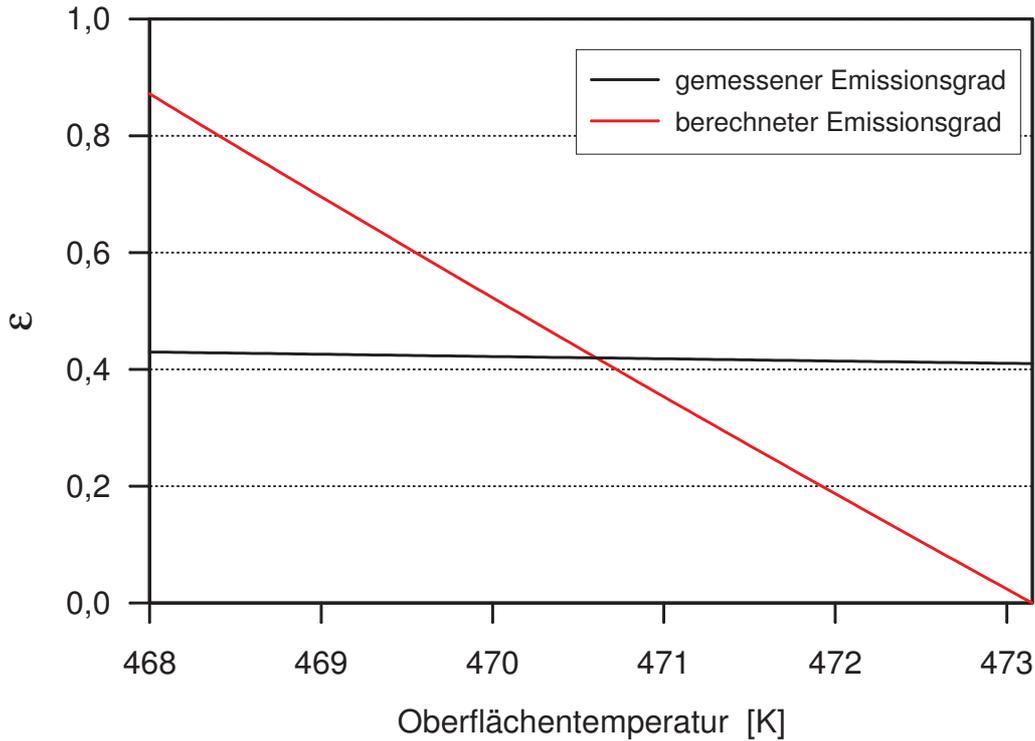


Abb. 4.23 Bestimmung der Oberflächentemperatur

4.3.4 Betrachtungen zur Messunsicherheit

In diesem Abschnitt werden die größten Fehlerquellen und die Annahmen zur Berechnung einer Messunsicherheit benannt. Eine sich stark auswirkende Fehlerquelle stellt die fehlerbehaftete Bestimmung der Oberflächentemperatur dar. Zur Beurteilung des Einflusses einer fehlerhaft bestimmten Oberflächentemperatur wird der relative Fehler für den Emissionsgrad in Abhängigkeit eines Oberflächentemperaturfehlers berechnet. Hierzu betrachten wir die von der Oberfläche ausgestrahlte Wärmestromdichte \dot{q}_o an eine schwarze Umgebung mit der Temperatur T_u .

$$\dot{q}_o = \varepsilon \sigma (T_o^4 - T_u^4) \quad (4.22)$$

Ein Fehler bei der Bestimmung dieser Wärmestromdichte wirkt sich analog auf den Emissionsgrad aus. Daher ergibt sich gemäß der von Rothe [51] und Profos [48] dargestellten Berechnungsgleichung der relative Fehler des Emissionsgrades zu

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(\frac{4T_o^4 - T_u^4}{T_o^4 - T_u^4} \right) \frac{\Delta T_o}{T_o} \quad (4.23)$$

Für Fehlbestimmungen der Oberflächentemperatur mit Abweichungen von 0,1 K, 0,2 K und 0,5 K ist der relative Fehler des hemisphärischen Gesamtemissionsgrads

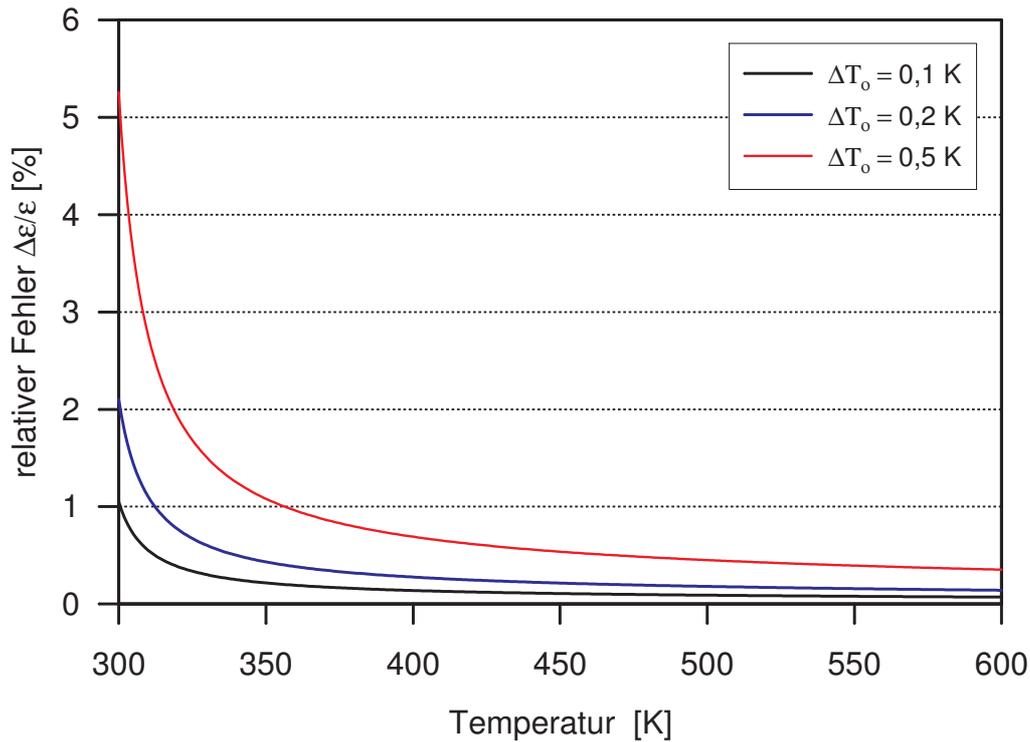


Abb. 4.24 Relativer Fehler aufgrund einer falsch bestimmten Oberflächentemperatur

in Abbildung 4.24 über der Oberflächentemperatur aufgetragen. Bei der Berechnung dieser Kurven wird eine Umgebungstemperatur von $T_u = 290$ K angenommen. Es ist zu sehen, dass mit steigender Abweichung ΔT_o der Fehler zunimmt. Er nimmt jedoch mit steigender Oberflächentemperatur stark ab. Je größer die Differenz zwischen der Umgebungstemperatur und der Oberflächentemperatur ist, um so geringer wirkt sich eine Fehlbestimmung der Oberflächentemperatur aus.

Neben der Bestimmung der Oberflächentemperatur ist die Wiederholgenauigkeit der Messungen entscheidend für die Angabe einer Messunsicherheit. Zur Untersuchung der Reproduzierbarkeit der Messungen wird eine Probe auf 200°C temperiert und ihr Spektrum unter zwei Winkel 0° und 45° abwechselnd gemessen. Jeder Winkel wird 50 mal angefahren. Dabei werden jeweils 5 Spektren aufgezeichnet. Für beide Winkel wird jeweils durch Mittelung über alle Spektren des jeweiligen Winkels ein Mittelwertspektrum berechnet. Anschließend werden die relativen Abweichungen der einzelnen Spektren von diesem Mittelwertspektrum ermittelt. Die abschließend gemittelten Abweichungen sind in Abbildung 4.25 dargestellt. Die mittlere Abweichung bleibt dabei für beide Winkel im Bereich unterhalb von 3 Prozent. Die Wiederholgenauigkeit ist damit als befriedigend nachgewiesen. Die Winkelwiederholgenauigkeit ist sehr hoch, da die beiden Verläufe ähnlich sind. Hierbei ist zu beachten, dass die 0° Position mittels eines mechanischen Anschlags garantiert wird. Die stärkeren Abweichungen im

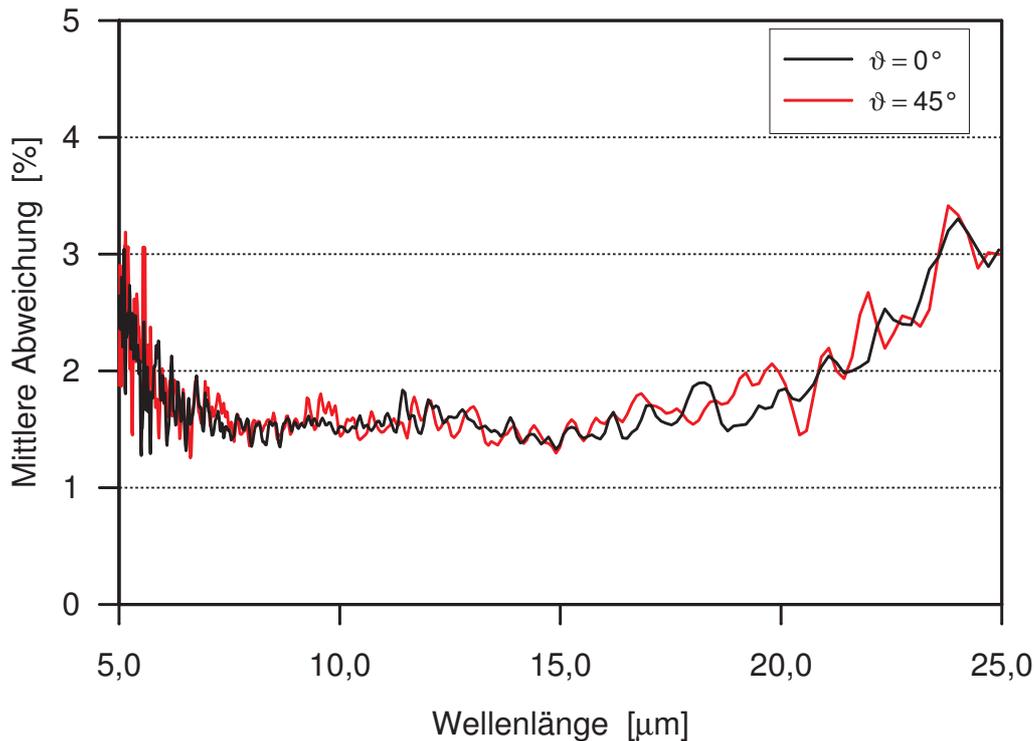


Abb. 4.25 Reproduzierbarkeit

Bereich größerer Wellenlängen beruhen auf der trägen Temperierung des Detektors. Die dadurch auftretenden Temperaturänderungen des Detektors wirken sich aufgrund des Temperaturbereichs um 280 K stärker auf den langwelligen Spektrumsbereich aus. Die größte Fehlerquelle der Anlage liegt jedoch im Bereich der Ausrichtung der Bauteile im Strahlengang. Es ist wichtig die Anlagenteile möglichst exakt auszurichten. Der kritischste Bereich hierbei ist die Einstellung des richtigen Strahlengangs zum Hohlraumstrahler. Der Hohlraumstrahler hat eine Öffnung mit einem Durchmesser von 45 mm und der Messfleck hat einen Durchmesser von 40 mm bei senkrechter Ausrichtung der Messfläche zum Strahlengang. Bei kleinsten Justagefehlern weitet sich der Messfleck auf und wandert aus der Mitte der Öffnung, so dass keine Hohlraumstrahlung mehr detektiert wird. Durch leichte Winkelverstellungen des FTIR-Spektrometers unterhalb von 1° ist dieser Fehler schon so stark, dass die unterschiedlichen Emissionsgradwerte bis zu 50% von einander abweichen. Eine möglichst genaue Justage des Strahlengangs ist daher unerlässlich. Eine Möglichkeit die Güte der Justage zu überprüfen ist der Vergleich der Strahlungsaustauschfunktion $G(\lambda)$ mit der Schwarzkörperstrahlungsfunktion $L_{\lambda,s}(\lambda)$ bei der Spektrometertemperatur. Bei einer mittleren Abweichung dieser beiden Funktionsverläufe geringer als 3% ist eine ausreichend gute Justage erzielt.

Zur Angabe eines Messergebnisses werden die Fehler zusammengefasst. Der relative Fehler basierend auf einer fehlerhaften Bestimmung der Oberflächentemperatur wird dabei auf maximal 1% geschätzt. Die Betrachtungen zur Reproduzierbarkeit liefern

einen relativen Fehleranteil von maximal 3%. Ein Fehler durch die Justage wird nicht berücksichtigt, da eine ausreichend gute Justage erfolgt. Eine Messung eines Emissionsgrades, der oberhalb der in Abbildung 4.19 dargestellten Messgrenzen liegt, erfolgt demnach mit einem relativen Fehler kleiner 4%.

4.3.5 Die Messwertauswertung

Zur Auswertung der Messungen müssen die Rohdatenspektren kalibriert, Quotienten der Spektren berechnet und die Oberflächentemperatur der Probe bestimmt werden. Aufgrund der großen Datenmenge ist eine manuelle oder programmierte Auswertung mit Tabellenkalkulationsprogrammen wie z.B. Excel nicht möglich. Die Auswertung erfolgt daher mit einem Programm innerhalb einer MatLab Umgebung. Diese automatisierte Auswertung garantiert darüber hinaus ein einheitliches Vorgehen bei den einzelnen Messungen.

Der Ablauf des Auswerteprogramms ist in Abbildung 4.26 schematisch dargestellt. Die Auswertung beginnt mit dem Einlesen der Rohdaten der Kalibrier-, Proben- und Schwarzkörperspektren. Zur Reduzierung zufälliger Fehler werden die jeweiligen Wiederholungsmessungen eines Messpunktes gemittelt. Die gemittelten Kalibrierspektren werden genutzt, um mit Hilfe der Gleichungen 4.12 und 4.13 die Systemantwort $R(\lambda)$ und die Strahlungsaustauschfunktion $G(\lambda)$ zu bestimmen. Mit Kenntnis dieser beiden Funktionen erfolgt die Kalibrierung der Probenspektren $L_p(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)$ und der Schwarzkörperspektren $L_{hs}(\lambda, T_{hs})$ gemäß Gleichung 4.10.

Die Division der kalibrierten Spektren liefert die gemessenen, spektralen, gerichteten Emissionsgrade in Abhängigkeit von der jeweiligen Temperatur des Hohlraumstrahlers T_{hs} .

$$\varepsilon'_\lambda(\lambda, \vartheta, \varphi, T_{hs}) = \frac{L_p(\lambda, \vartheta, \varphi, T_o)}{L_{hs}(\lambda, T_{hs})} \quad (4.24)$$

Zur weiteren Bearbeitung erfolgt im nächsten Schritt die Extrapolation der Polarwinkelabhängigkeit. Hierzu wird für jede Wellenlänge und für jeden Azimutwinkel jeweils ein Polynom 6. Grades an den Verlauf des über den Polarwinkel aufgetragenen Emissionsgrades angepasst. Der Wert des Emissionsgrades für 90° wird dazu mit Null angenommen. Die Emissionsgradwerte für Polarwinkel $\vartheta > 70^\circ$ werden mit diesen Polynomen bestimmt.

Mit den so erweiterten Datensätzen der gerichteten, spektralen Emissionsgrade werden für die jeweiligen Temperaturen T_{hs} die hemisphärischen Gesamtemissionsgrade berechnet. Hierzu werden die Werte der gerichteten, spektralen Emissionsgrade gemäß Gleichung 2.16 über alle Wellenlängen und alle Raumwinkel der Halbkugel integriert. Zur Bestimmung der Oberflächentemperatur wird mit den bestimmten hemisphärischen Gesamtemissionsgraden eine Geradengleichung aufgestellt. Der Schnittpunkt die-

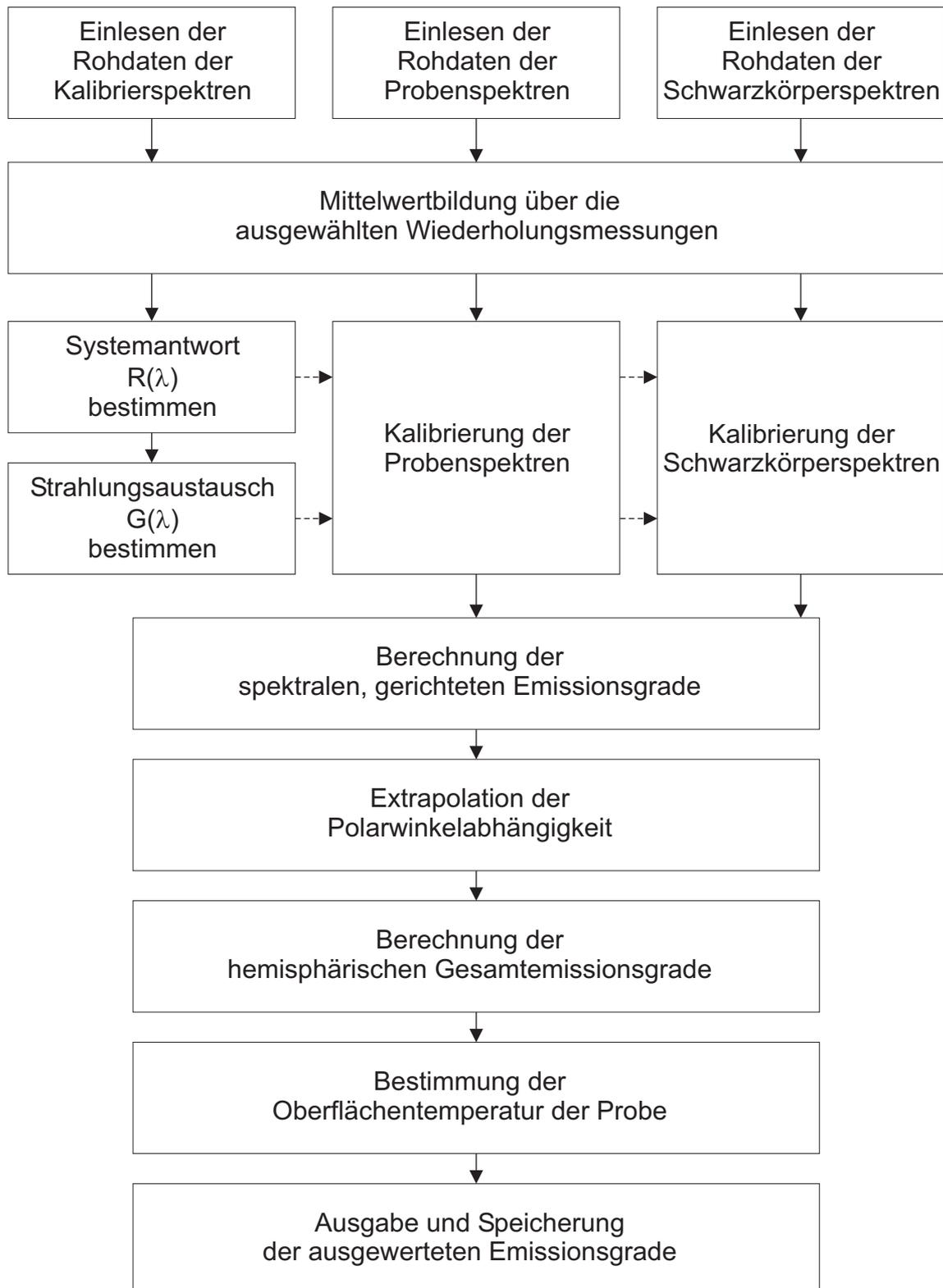


Abb. 4.26 Ablaufschema der Auswertung

ser Gerade mit dem Funktionsverlauf aus Gleichung 4.20 liefert wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben die Oberflächentemperatur der Probe.

Anschließend werden die gerichteten, spektralen Emissionsgrade für die bestimmte Oberflächentemperatur aus den Messdaten ermittelt. Hierzu erfolgt eine lineare Interpolation zwischen den direkten Messwerten oberhalb und unterhalb der bestimmten Oberflächentemperatur.

Zum Abschluss der Auswertung werden aus den ausgewerteten, gerichteten, spektralen Emissionsgraden ableitbare Emissionsgrade berechnet. Diese Emissionsgrade sind der gerichtete Gesamtemissionsgrad, der hemisphärische spektrale Emissionsgrad und der hemisphärische Gesamtemissionsgrad. Mit der Speicherung der ausgewerteten Daten und der Ausgabe der Messgrößen in Graphen endet die Auswertung.

5 Ergebnisse und Diskussion

Die Darstellung der Ergebnisse teilt sich in die Beschreibung der Berechnungsergebnisse und der Messergebnisse auf. Die Qualität des Berechnungsverfahrens wird durch die Betrachtungen im Abschnitt Validierung der Berechnung beurteilt. Auf die Validierungsbetrachtungen folgen die Berechnungsergebnisse für glatte und mikrostrukturierte Siliziumoberflächen. Diese Ergebnisse erlauben erste Aussagen über wichtige Einflussparameter bei der Mikrostrukturierung von technischen Oberflächen. Die Darstellung der Messergebnisse für glatte und mikrostrukturierte Siliziumoberflächen und ihre Diskussion beschließt dieses Kapitel.

5.1 Berechnungsergebnisse

Ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit stellt die Realisierung der Berechnung des Reflektionsgrades und des Transmissionsgrades für beliebig strukturierte Oberflächen dar. Die ausführlichen Betrachtungen zur Validierung des realisierten Verfahrens bilden die Basis für die Beurteilung der Rechenergebnisse für die mikrostrukturierten Oberflächen.

5.1.1 Validierung

Die Berechnung lässt sich nur schwer an Messdaten validieren, da es keine Datensätze zu Proben gibt, bei denen sowohl die komplexen Brechzahlen, als auch die Reflektions- und Transmissionsgrade bekannt sind.

Eine gute Möglichkeit zur Validierung des realisierten REM-Verfahrens bietet der Vergleich zwischen den mit dem REM-Verfahren berechneten Reflektionsgraden und den nach den im Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Fresnelschen Gleichungen berechneten Reflektionsgraden. Die Fresnelschen Gleichungen stellen dabei analytische Lösungen für eine glatte Oberfläche dar. Sie erlauben ebenso wie das REM-Verfahren die getrennte Berechnung für den p- und den s-polarisierten Fall. Der Vergleich der Fresnel-Werte und der REM-Werte erfolgt daher nach Polarisationsfällen getrennt und für eine glatte Oberfläche.

In Abbildung 5.1 sind die Berechnungsergebnisse im p-polarisierten Fall für eine glatte Siliziumoberfläche dargestellt. Der gerichtet-hemisphärische, spektrale Reflektionsgrad ist über den Einfallspolarwinkel aufgetragen. Die Berechnung erfolgt für eine Wellenlänge von $\lambda = 5 \mu\text{m}$ und mit einer komplexen Brechzahl gemäß Palik [47] von $\bar{n} = 3,426 + i 1,99 \cdot 10^{-7}$. Die mit 4000 Stützstellen abgebildete Oberfläche hat dabei

eine Länge von $200\ \mu\text{m}$. Es ist deutlich eine gute Übereinstimmung der beiden Lösungen zu sehen. Bis $\vartheta = 70^\circ$ liegt die Abweichung unter $0,3\%$. Mit dem REM-Verfahren oberhalb von $\vartheta = 70^\circ$ berechnete Werte sind leider nicht verwertbar, da hier zu große Abweichungen auftreten.

Diese Abweichungen oberhalb von $\vartheta = 70^\circ$ treten für den in Abbildung 5.2 dargestellten s-polarisierten Fall noch deutlicher hervor. Die Berechnung wird dabei mit den selben Rahmenbedingungen wie im p-polarisierten Fall durchgeführt. Bis zum Polarwinkel von $\vartheta = 70^\circ$ bleiben die Abweichungen unterhalb von $0,35\%$.

Entsprechend der vorhergehenden Betrachtungen zum p- und s-polarisierten Fall ergibt sich für den gemittelten unpolarisierten Fall eine ebenso gute Übereinstimmung der unterschiedlich berechneten Reflektionsgrade. Bis zu einem Polarwinkel von mindestens $\vartheta = 70^\circ$ ist in Abbildung 5.3 die gute Übereinstimmung zu erkennen. Es bleibt somit festzustellen, dass das REM-Verfahren bis zu einem Polarwinkel von $\vartheta = 70^\circ$ sehr gute Ergebnisse liefert. Eine Verbesserung der Ergebnisse für Polarwinkel $> 70^\circ$ ist nicht möglich, da hier zu längere Oberflächen mit ähnlicher Diskretisierung zu berechnen wären. Die hierdurch entstehende größere Anzahl an Stützstellen kann mit dem im Rahmen dieser Arbeit genutztem Hochleistungsrechner nicht bearbeitet werden.

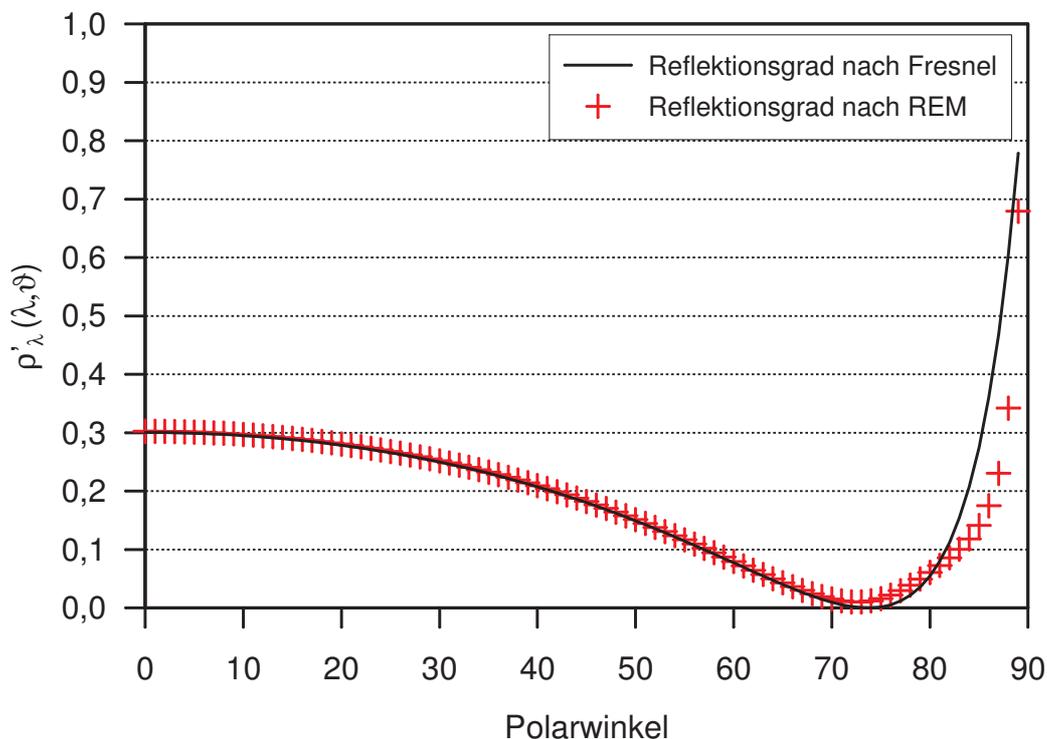


Abb. 5.1 Vergleich der nach Fresnel und mit dem REM-Verfahren berechneten gerichteten-hemisphärischen, spektralen Reflektionsgrade für den p-polarisierten Fall (Silizium, $\lambda = 5\ \mu\text{m}$, $\bar{n} = 3,426 + i1,99 \cdot 10^{-7}$, $l_{x,ges} = 200\ \mu\text{m}$, $N=4000$)

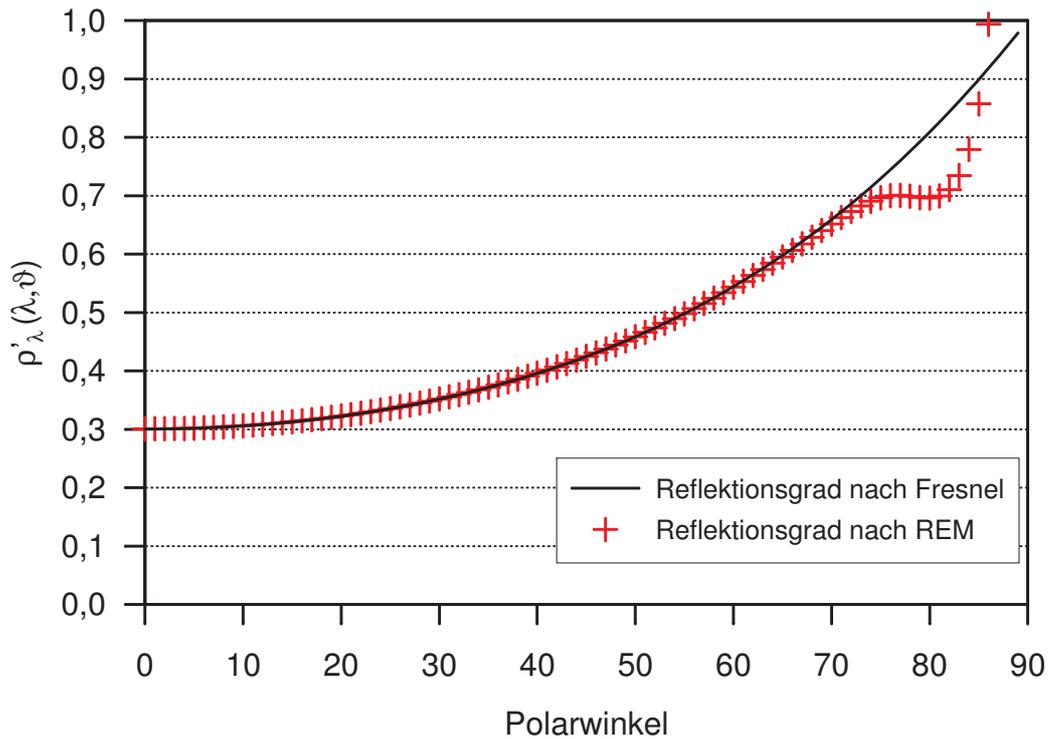


Abb. 5.2 Vergleich der nach Fresnel und mit dem REM-Verfahren berechneten gerichteten-hemisphärischen, spektralen Reflektionsgrade für den s-polarisierten Fall (Silizium, $\lambda = 5 \mu\text{m}$, $\bar{n} = 3,426 + i 1,99 \cdot 10^{-7}$, $l_{x,ges} = 200 \mu\text{m}$, $N=4000$)

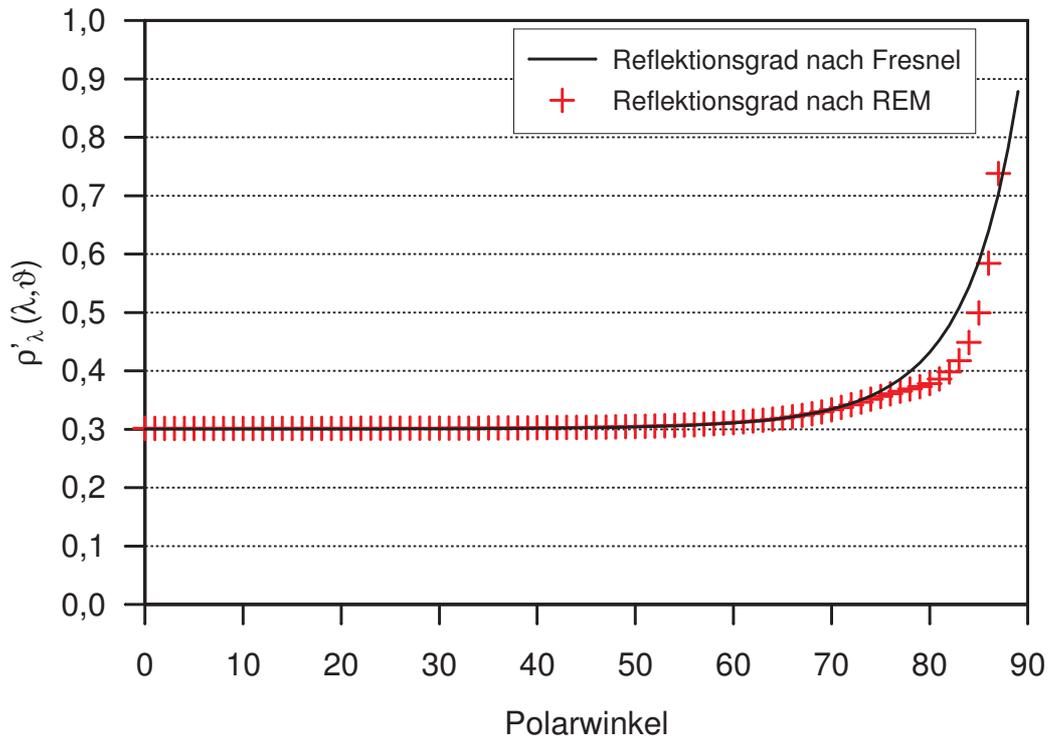


Abb. 5.3 Vergleich der nach Fresnel und mit dem REM-Verfahren berechneten gerichteten-hemisphärischen, spektralen Reflektionsgrade für den gemittelten unpolarisierten Fall (Silizium, $\lambda = 5 \mu\text{m}$, $\bar{n} = 3,426 + i 1,99 \cdot 10^{-7}$, $l_{x,ges} = 200 \mu\text{m}$, $N=4000$)

Die vorhergehenden Betrachtungen beachten jeweils nur eine Wellenlänge von $\lambda = 5 \mu\text{m}$. Eine Überprüfung der Genauigkeit für andere Wellenlängen und andere komplexe Brechzahlen ist noch durchzuführen. Hierzu wird die Berechnung für Wellenlängen im Bereich von $5 \mu\text{m}$ bis $25 \mu\text{m}$ mit den entsprechenden komplexen Brechzahlen für Silizium durchgeführt. Die berücksichtigten Wellenlängen mit den zugehörigen Werten der komplexen Brechzahl finden sich in Anhang C. In Abbildung 5.4 ist der Vergleich der nach Fresnel und mit dem REM-Verfahren berechneten Werte für den p-polarisierten Fall bei einem Polarwinkel von $\vartheta = 50^\circ$ dargestellt. Die Werte für den gerichteten-hemisphärischen, spektralen Reflektionsgrad sind über die Wellenlänge in μm aufgetragen. Die Berechnung erfolgt für Oberflächen die jeweils eine Länge von 40λ und 100 Stützstellen pro Wellenlänge aufweisen. Für alle berechneten Wellenlängen ist eine gute Übereinstimmung der Werte zu erkennen.

Eine genauso gute Übereinstimmung liefert die Betrachtung der Berechnung des s-polarisierten Falls, deren Ergebnis in Abbildung 5.5 dargestellt ist. Es ist der Vergleich der nach Fresnel und mit dem REM-Verfahren berechneten Werte für den s-polarisierten Fall bei einem Polarwinkel von $\vartheta = 0^\circ$ zu sehen. Die Abweichungen liegen dabei sowohl für den s-polarisierten Fall als auch für den p-polarisierten Fall für alle Wellenlängen bei Polarwinkeln kleiner als 70° unterhalb von $0,35\%$.

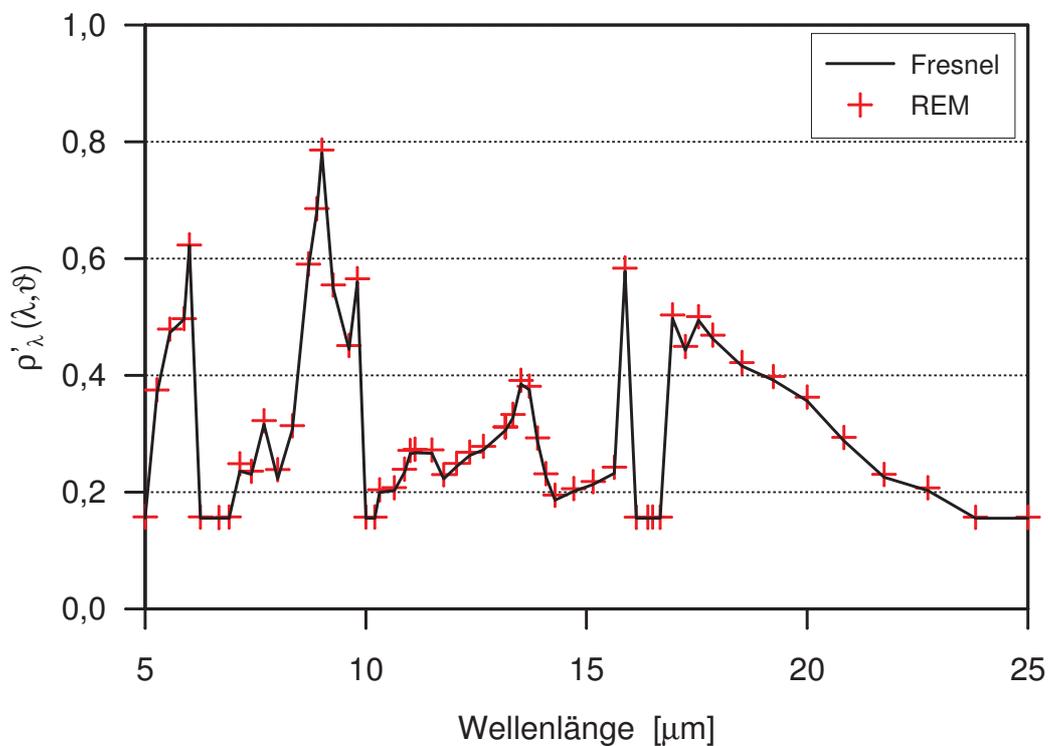


Abb. 5.4 Vergleich der Fresnel- und der REM-Daten bei p-polarisiertem Einfall über die betrachteten Wellenlängen für einen Polarwinkel von 50°

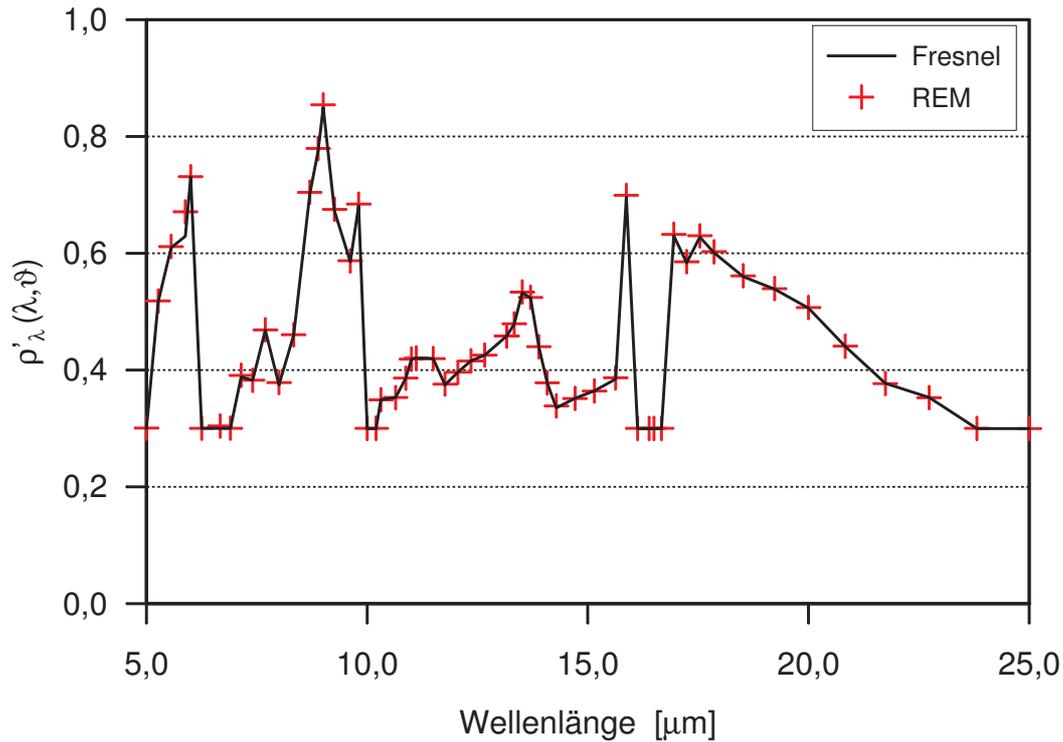


Abb. 5.5 Vergleich der Fresnel- und der REM-Daten bei s-polarisierter einfallender Welle über die betrachteten Wellenlängen für einen Polarwinkel von 0°

Für das realisierte REM-Verfahren ist somit nachgewiesen, dass es die Berechnung des gerichteten-hemisphärischen, spektralen Reflektionsgrads für alle Wellenlängen im untersuchten Bereich von 5 – 25 μm und für Polarwinkel bis 70° korrekt ermöglicht. Neben der Berechnung des Reflektionsgrads erfolgt auch die Berechnung des Transmissionsgrads. Die Validierungsmöglichkeiten sind hier noch stärker eingeschränkt. Eine wesentliche Überprüfung auf die Einhaltung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik ist jedoch möglich. Hierzu wird bei einer Wellenlänge von 5 μm eine vollkommen transmissive Grenzfläche berechnet. Eine solche Oberfläche wird durch die komplexe Brechzahl $\bar{n} = 1 + 0i$ charakterisiert. Die Berechnung muss für eine solche Grenzfläche einen Reflektionsgrad von 0 und einen Transmissionsgrad von 1 ergeben, da alle einfallende Energie vollständig transmittiert wird. Das Ergebnis der Berechnung ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Die Energie bleibt für Polarwinkel kleiner 70° gemäß der Berechnung mit weniger als 1% Abweichung erhalten. Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist somit für Polarwinkel kleiner als 70° erfüllt. Eine Variation der Wellenlänge und verschieden strukturierte Oberflächen liefern analoge Ergebnisse zu den in Abbildung 5.6 dargestellten Ergebnissen für eine glatte Oberfläche.

Für eine nicht transmissive spiegelnde Oberfläche muss sich demnach ein Reflektionsgrad von 1 und ein Transmissionsgrad von 0 ergeben. Die Berechnung dieses Falls ergibt

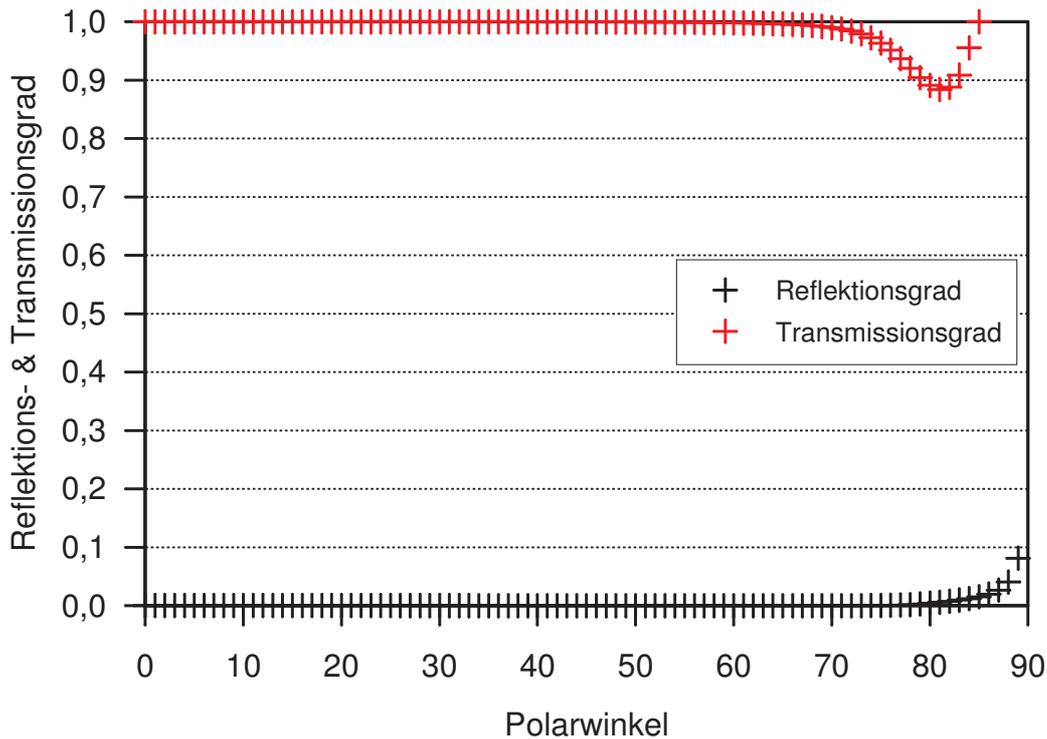


Abb. 5.6 Überprüfung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik: Berechnung einer glatten, vollkommen transmissiven Oberfläche ($\lambda = 5 \mu\text{m}$, $\bar{n} = 1 + 0i$, $N = 4000$, $l_{x,ges} = 200 \mu\text{m}$)

ein zu Abbildung 5.6 analoges Bild bei dem jedoch Reflektions- und Transmissionsgrad vertauscht sind.

Soweit diese Überprüfungen ausreichend sind lässt sich feststellen, dass eine Berechnung des Transmissionsgrades für unterschiedliche Wellenlängen und Polarwinkel bis 70° korrekt möglich ist.

Neben dem Vergleich mit nach Fresnel berechneten Daten ist auch die Untersuchung der numerischen Stabilität von Bedeutung. Hierzu werden mehrere Berechnungen bei einer Wellenlänge von $5 \mu\text{m}$ mit der Brechzahl $\bar{n} = 3,426 + i 1,99 \cdot 10^{-7}$ durchgeführt. Die jeweils $200 \mu\text{m}$ lange Oberfläche wird dabei mit einer Stützstellenanzahl von 100 bis 5500 versehen. In Abbildung 5.7 ist die jeweilige mittlere Abweichung des berechneten Reflektionsgrads von dem nach Fresnel berechneten Wert über die Stützstellenanzahl N dargestellt. Für eine geringe Stützstellenanzahl unterhalb von 1000 Stützstellen ist das Verfahren extrem instabil und liefert keine verwertbaren Ergebnisse. Im Bereich zwischen 1000 und 2000 Stützstellen liefert die Rechnung analoge Verläufe über Polarwinkel und Wellenlänge jedoch weichen die Werte noch zwischen 2% und 10% von den Fresnelwerten ab. Für eine Stützstellenanzahl oberhalb von 2000 Stützstellen ergeben sich verwertbare Werte mit einer Abweichung von maximal 1,5%. Diese Stützstellenanzahl

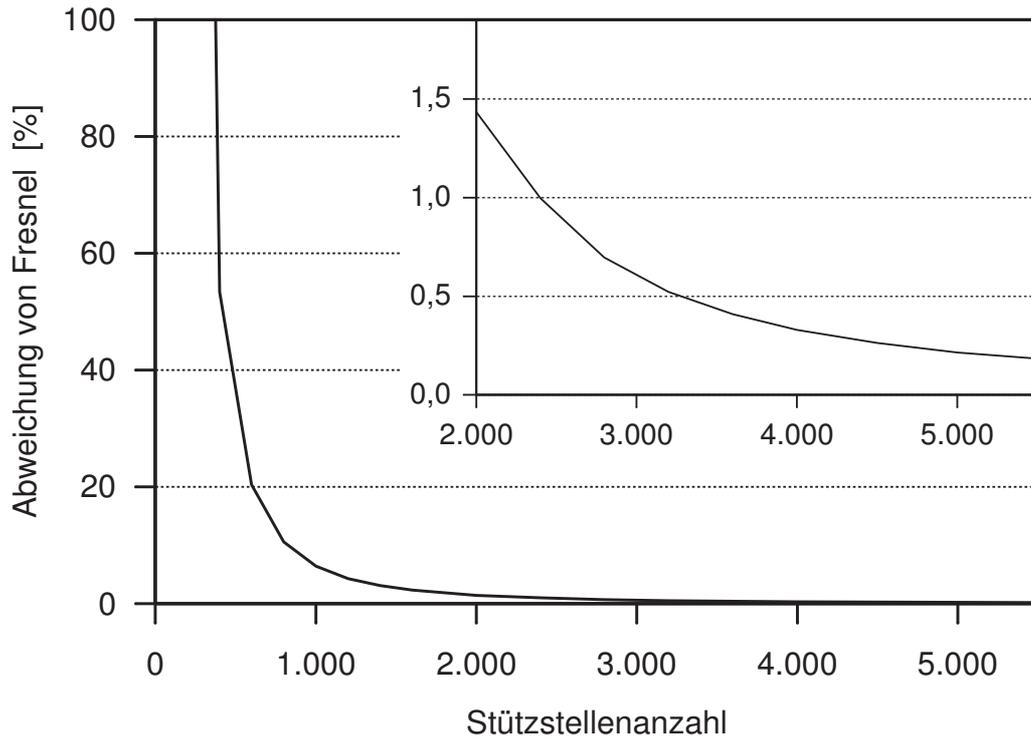


Abb. 5.7 Überprüfung der numerischen Stabilität durch Rechnungen mit unterschiedlicher Stützstellenanzahl ($\lambda = 5 \mu\text{m}$, $\bar{n} = 3,426 + i 1,99 \cdot 10^{-7}$, $l_{x,ges} = 200 \mu\text{m}$)

von 2000 entspricht dabei 50 Stützstellen pro Wellenlänge. In den weiteren Berechnungen wird daher darauf geachtet eine Mindestanzahl von 50 Stützstellen pro Wellenlänge einzuhalten. Es ist somit immer zu versuchen, eine möglichst große Stützstellenanzahl pro Wellenlänge zu realisieren.

Ein weiterer die Berechnung stark beeinflussender Faktor stellt die Breite der Normalverteilung der einfallenden Welle dar. Bei zu eng gewählter Breite wird die Oberfläche nur in Teilen beleuchtet und Effekte aufgrund der Periodizität der Mikrostrukturierung können nicht erfasst werden. Für eine zu große Breite der Normalverteilung wird der Rand der betrachteten Oberfläche zu stark bestrahlt, so dass Randeffekte die Rechnung negativ beeinflussen. Zur Überprüfung des Einflusses der Breite wird eine glatte Siliziumoberfläche mit einer Länge von $200 \mu\text{m}$ und einer Stützstellenanzahl von 4000 betrachtet. Die einfallende Welle hat eine Wellenlänge von $5 \mu\text{m}$ und die entsprechende komplexe Brechzahl des Siliziums lautet $\bar{n} = 3,426 + i 1,99 \cdot 10^{-7}$. Für die Breite der Normalverteilung gilt bei den Berechnungen die Formel

$$b = b_{fak} l_{x,ges} \cos \vartheta_0, \quad (5.1)$$

mit dem variierendem Faktor

$$b_{fak} = \frac{1}{20}; \frac{1}{16}; \frac{1}{12}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; 8.$$

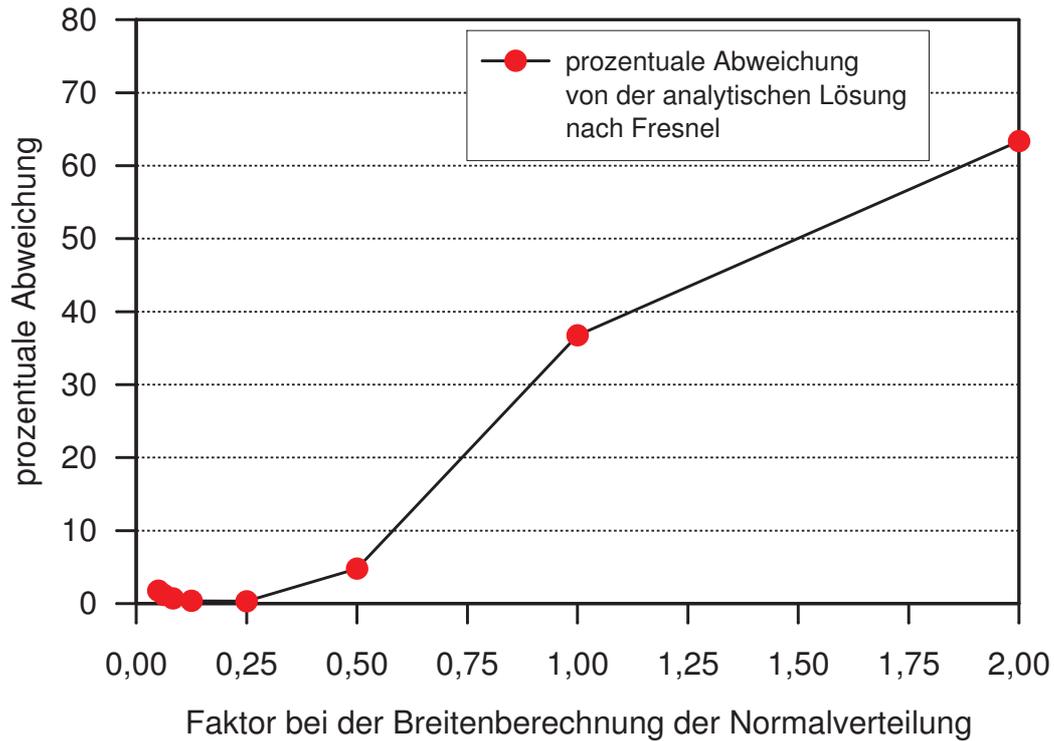


Abb. 5.8 Abweichung für verschieden breite Normalverteilungen der einfallenden Strahlung

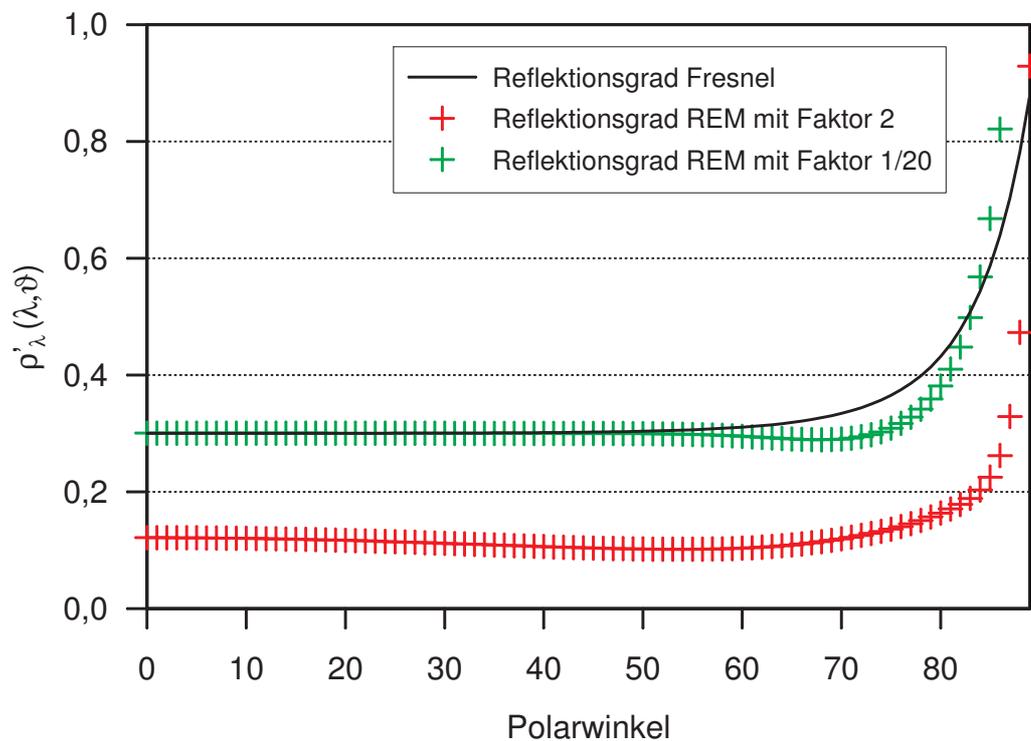


Abb. 5.9 Berechnete Reflektionsgrade mit verschieden breiten Normalverteilungen

In Abbildung 5.8 sind die jeweiligen prozentualen Abweichungen von der analytischen Lösung nach Fresnel über den Faktor b_{fak} der Normalverteilungsbreitenberechnung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für den Faktor $b_{fak} = 1/4$ ein Minimum der Abweichung vorliegt. Die Darstellung der Ergebnisse der Rechenläufe mit den Faktoren $1/20$ und 2 verdeutlicht noch einmal die Art des Fehlers bei zu enger oder breiter Normalverteilung. Im Fall einer zu engen einfallenden Welle wird die Berechnung für größere Polarwinkel schnell ungenau. Bei einer zu breiten einfallenden Welle ergeben sich über alle Wellenlängen und Polarwinkel sehr stark abweichende Werte von der analytischen Lösung. Entsprechend dieser Betrachtungen wird im Rahmen dieser Arbeit der Faktor b_{fak} mit einem Wert von $1/4$ genutzt.

Die Normalverteilung der einfallenden Welle reduziert somit deutlich die Randeffekte, jedoch bewirkt sie bei größeren Polarwinkeln eine starke Einengung der einfallenden Welle und scheint damit hauptverantwortlich für das Ansteigen des Fehlers für Polarwinkel über 70° zu sein.

5.1.2 Mikrostrukturierte Oberflächen

In diesem Abschnitt werden zuerst die Ergebnisse der REM-Berechnung für die mikrostrukturierten Siliziumoberflächen, die für Messungen zur Verfügung stehen, dargestellt und diskutiert. Hierauf aufbauend erfolgt eine Betrachtung des Einflusses der Rinnentiefe und der Periodenlänge der Mikrostrukturierung.

Die Berechnung des Emissionsgrades wird zuerst für eine glatte Siliziumoberfläche mit den im Anhang C dargestellten Wellenlängen und komplexen Brechzahlen durchgeführt. Die Berechnung erfolgt dabei für eine Oberfläche, die jeweils eine Ausdehnung von 40λ in x-Richtung hat und mit 5000 Stützstellen diskretisiert ist. In Abbildung 5.10 ist das Ergebnis dieser Berechnung dargestellt. Es ist der gerichtete, spektrale Emissionsgrad ε'_λ über die Wellenlängen von $5 \mu\text{m}$ bis $25 \mu\text{m}$ und über die Polarwinkel von 0° bis 70° aufgetragen. Ein Vergleich mit den Messdaten ist allerdings nur in Form eines qualitativen Veränderungsvergleichs möglich, da die komplexen Brechzahlen zu der uns vorliegenden Probe nicht vermessen sind und somit entsprechende Literaturdaten zu nutzen sind. Allerdings sind diese Literaturdaten nicht mit einer hohen spektralen Auflösung erhältlich und die Charakterisierungen der jeweils untersuchten Oberflächen sind nur unzureichend dokumentiert. Eine kurze Darstellung zum Vergleich der Rechnung und der Messung erfolgt am Ende des Messergebnisseabschnittes 5.2.

Zur Bestimmung der Veränderungen durch die Mikrostrukturierung der Oberfläche werden die 4 vermessenen Strukturierungen modelliert und berechnet. Eine prinzipielle Darstellung der betrachteten Mikrostrukturierung ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Es werden periodische Rechteckstrukturen mit einer Periodenlänge Λ , einer Rinnenbreite Υ und einer Rinnentiefe Ψ modelliert. Die Parameter der Mikrostrukturierungen der

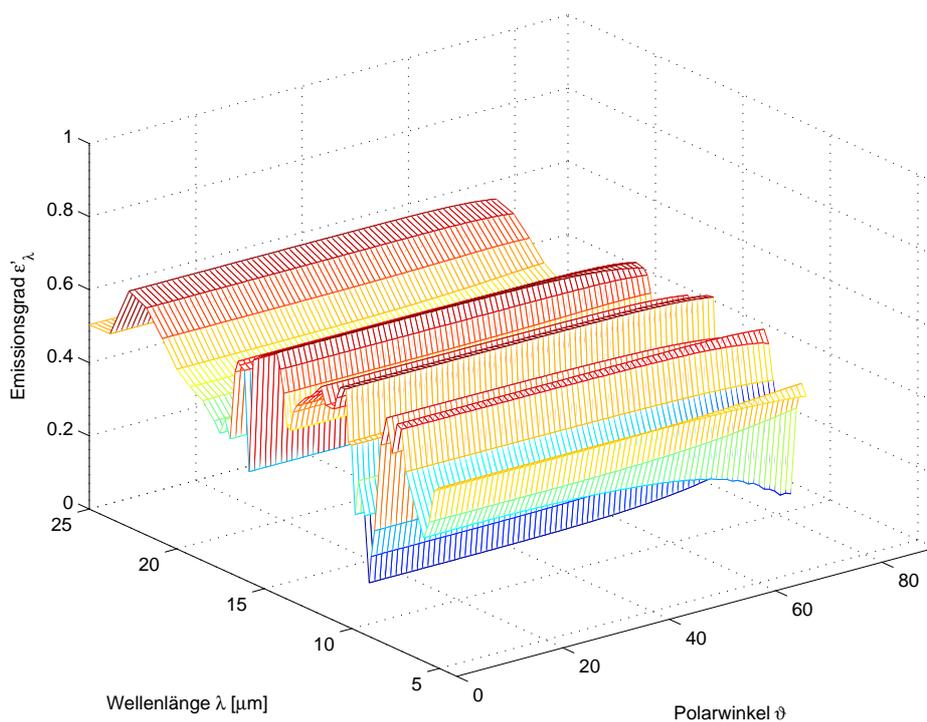


Abb. 5.10 Berechnete Emissionsgrade für eine glatte Siliziumoberfläche

berechneten Oberflächen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Die 4 Berechnungen für die mikrostrukturierten Oberflächen erfolgen analog zu der Berechnung der glatten Oberfläche bei den in Anhang C aufgelisteten Wellenlängen mit den entsprechenden komplexen Brechzahlen.

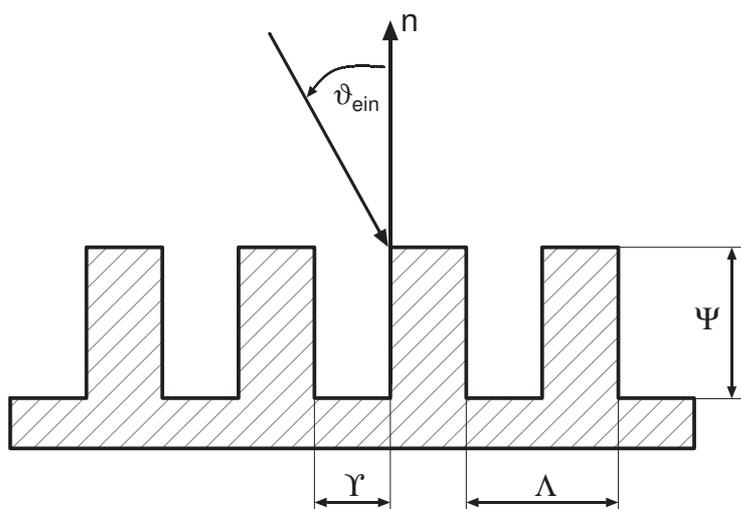
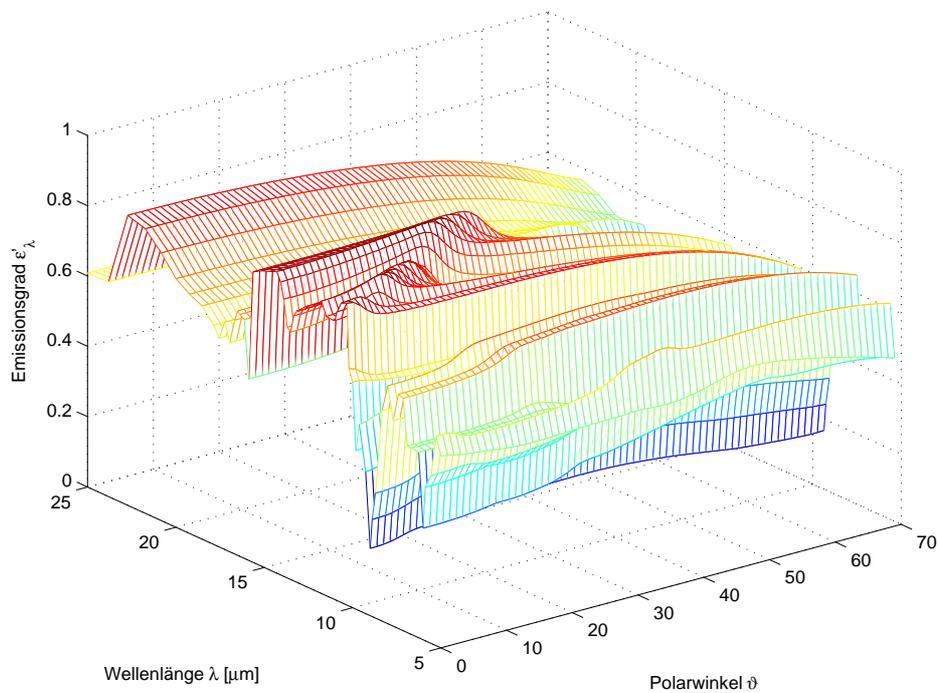


Abb. 5.11 Schematische Darstellung der berechneten Strukturen

Tabelle 5.1 Parameter der berechneten mikrostrukturierten Oberflächen

Laufnummer	Periode Λ [μm]	Tiefe Ψ [μm]	Rinnenbreite Υ [μm]	Stegbreite [μm]
1	10,0	3,0	6,5	3,5
2	10,0	11,0	6,5	3,5
3	10,0	21,0	6,5	3,5
4	10,0	34,0	6,5	3,5

Die Ergebnisse der 4 Berechnungen werden in den Abbildungen 5.12 bis 5.15 dargestellt. Es ist jeweils der gerichtete, spektrale Emissionsgrad ε'_λ über die Wellenlängen von $5 \mu\text{m}$ bis $25 \mu\text{m}$ und über die Polarwinkel von 0° bis 70° aufgetragen. Die Mikrostrukturierung hat einen deutlichen Einfluss auf das Emissionsverhalten der Oberfläche. In weiten Spektralbereichen erhöht sich der Emissionsgrad um bis zu 0,3 Punkte. Für den spektralen Verlauf der Emissionsgradkurven ist die aufgeprägte Struktur und ihre Periode entscheidend, da alle 4 Oberflächen ähnliche Verläufe aufweisen. Die leicht stärkeren Erhöhungen des Emissionsgrades für größere Rinnentiefen sprechen dafür,

**Abb. 5.12** Berechnete Emissionsgrade für eine Siliziumoberfläche mit der Struktur 1

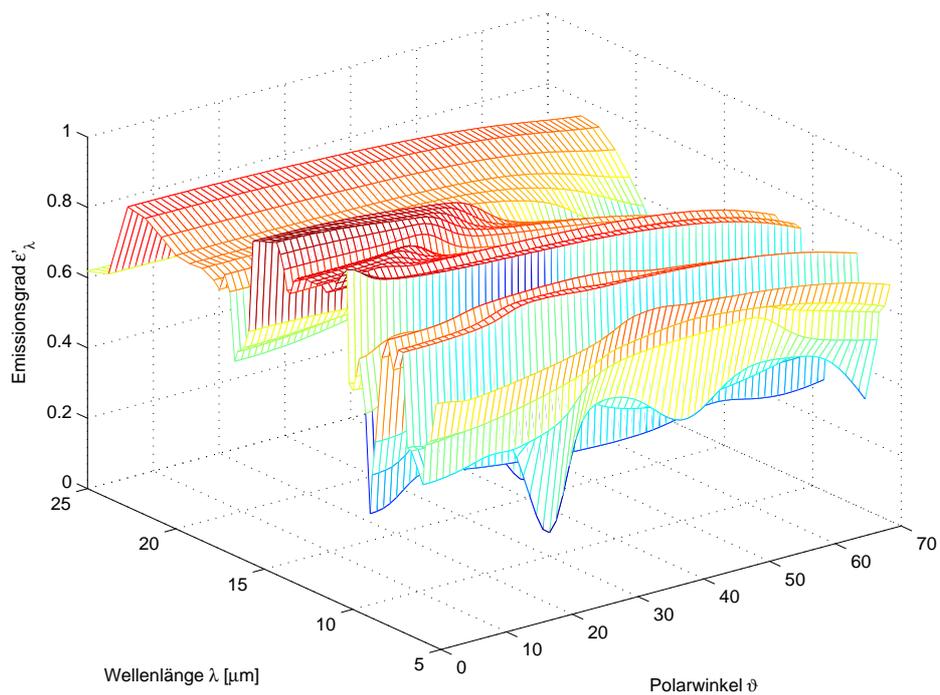


Abb. 5.13 Berechnete Emissionsgrade für eine Siliziumoberfläche mit der Struktur 2

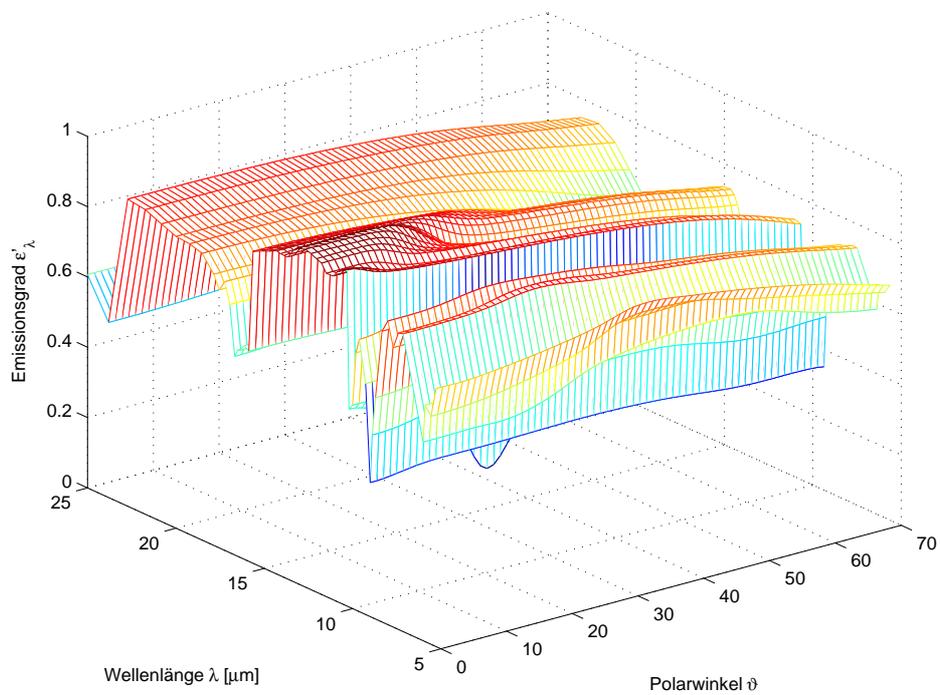


Abb. 5.14 Berechnete Emissionsgrade für eine Siliziumoberfläche mit der Struktur 3

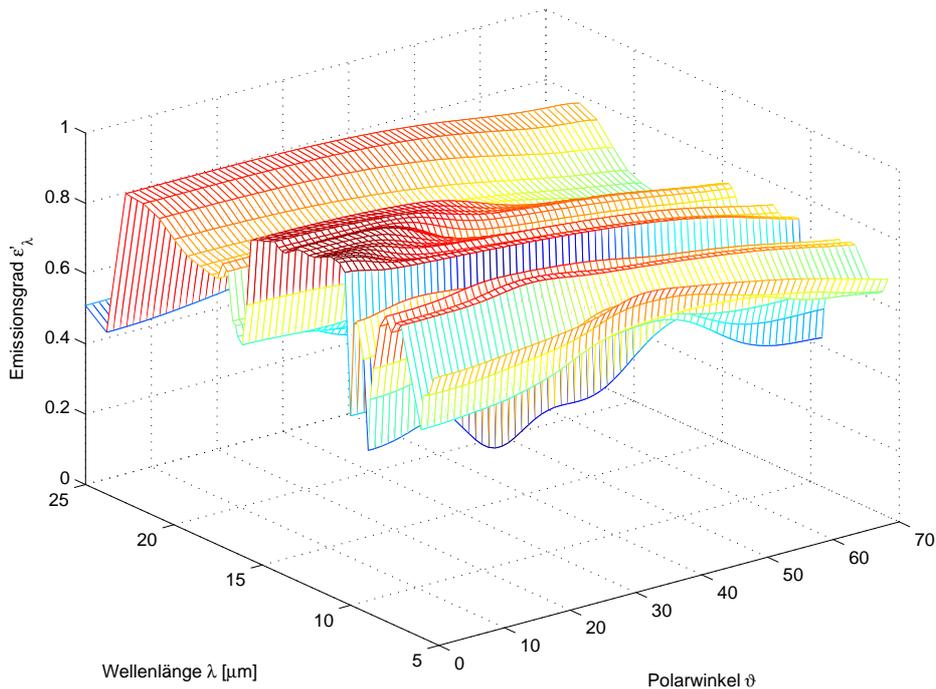


Abb. 5.15 Berechnete Emissionsgrade für eine Siliziumoberfläche mit der Struktur 4

dass die Rinnen einen ähnlichen Effekt wie Hohlraumstrahler erzeugen.

Zur Überprüfung dieser Aussage werden für eine Strukturierung verschiedene Rinnentiefen von $3\ \mu\text{m}$ bis $35\ \mu\text{m}$ bei einer Wellenlänge von $8\ \mu\text{m}$ betrachtet. Die Änderung des Verlaufs der spektralen, gerichteten Emissionsgradskurve tritt dabei schon bei kleinen Rinnentiefen ausgeprägt auf und verändert sich für größere Rinnentiefen nicht. Eine weitere Vertiefung bewirkt nur noch geringe Steigerungen der spektralen, gerichteten Emissionsgrade um bis zu 0,03 Punkte.

Zur Überprüfung des Einflusses der Periodenlänge der Strukturierung werden für eine Siliziumoberfläche bei den Wellenlängen $6\ \mu\text{m}$ und $8\ \mu\text{m}$ unterschiedliche Strukturierungen betrachtet. Die Berechnungen des spektralen, gerichteten Emissionsgrades erfolgen für die in Tabelle 5.2 aufgelisteten Strukturierungen. Die Strukturen weisen bei einer konstanten Rinnentiefe von $5\ \mu\text{m}$ eine variierende Periodenlänge auf. Die Rinnenbreite und Stegbreite sind jeweils halb so lang wie die Periode.

Die Ergebnisse für die Berechnung des Emissionsgrades für die verschiedenen Strukturierungen bei einer Wellenlänge von $8\ \mu\text{m}$ sind in Abbildung 5.16 dargestellt. Der spektrale, gerichtete Emissionsgrad ist über die Polarwinkel von 0° bis 70° und über die Periodenlänge pro Wellenlänge aufgetragen. Die maximale Verstärkung der Emissionsgrade ergibt sich für die Struktur 3. Bei dieser Struktur stimmen Periodenlänge und Wellenlänge überein. Die geringsten Verstärkungen gibt es für Periodenlängen, die

Tabelle 5.2 Berechnete Mikrostrukturierungen auf einer Siliziumoberfläche mit unterschiedlichen Periodenlängen und einer Rinnentiefe von $\Psi = 5 \mu\text{m}$

Laufnummer	$\lambda = 6 \mu\text{m}$			$\lambda = 8 \mu\text{m}$		
	Periode [μm]	Rinnenbreite [μm]	Stegbreite [μm]	Periode [μm]	Rinnenbreite [μm]	Stegbreite [μm]
1	3	1,5	1,5	4	2	2
2	4	2	2	6	3	3
3	5	2,5	2,5	8	4	4
4	6	3	3	10	5	5
5	7	3,5	3,5	12	6	6
6	8	4	4	14	7	7
7	9	4,5	4,5	16	8	8
8	10	5	5	18	9	9
9	11	5,5	5,5	20	10	10
10	12	6	6			
11	15	7,5	7,5			
12	18	9	9			

um eine halbe Wellenlänge von der untersuchten Wellenlänge abweichen. Hierbei ist zu beachten, dass die Verstärkung für die kürzere Periodenlänge schwächer ist. Allerdings steigen für Polarwinkel oberhalb von 40° in beiden Fällen die Verstärkung deutlich an. Für Periodenlängen, die mehr als die doppelte Wellenlänge aufweisen verliert die Strukturierung ihren Effekt und die Emissionsgradwerte fallen schnell zurück auf Werte für eine glatte Oberfläche.

Die berechneten Emissionsgrade für die verschiedenen Strukturierungen bei einer Wellenlänge von $6 \mu\text{m}$ sind in Abbildung 5.16 dargestellt. Hier ergibt sich ebenfalls die maximale Verstärkung der Emissionsgrade für die Struktur 4, bei der die Periodenlänge mit der Wellenlänge übereinstimmt. Für die Periodenlänge, die eine halbe Wellenlänge ausmacht, ist die Verstärkung analog zur Berechnung bei $\lambda = 8 \mu\text{m}$ am geringsten. Überschreiten die Periodenlängen das doppelte der Wellenlänge verliert auch hier die Strukturierung ihren Effekt und die Emissionsgradwerte fallen auf Werte für eine glatte Oberfläche zurück.

Ein Unterschied bei den betrachteten Wellenlängen liegt in der unterschiedlich guten Verstärkung des Emissionsgrades durch die Strukturierung. Hierzu werden in Abbildung 5.18 die besten Verstärkungen bei den jeweiligen Wellenlängen verglichen. Diese maximalen Verstärkungen treten dabei jeweils auf, wenn Periodenlänge und Wellenlänge übereinstimmen. Es ist zu sehen, dass für eine Wellenlänge von $6 \mu\text{m}$ eine deutlich bessere Steigerung der Emissionsgrade erzielt wird. Die Steigerung des Emis-

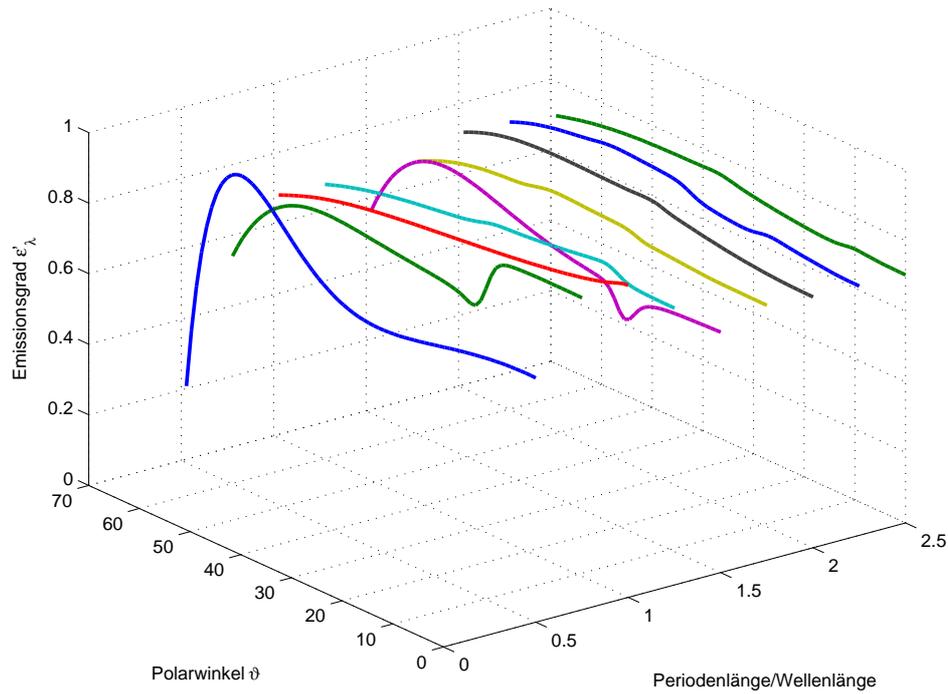


Abb. 5.16 Berechnete spektrale, gerichtete Emissionsgrade für eine Siliziumoberfläche bei einer Wellenlänge von $8 \mu\text{m}$ mit einer konstanten Rinnentiefe von $\Psi = 5 \mu\text{m}$ und verschiedenen Periodenlängen gemäß Tabelle 5.2

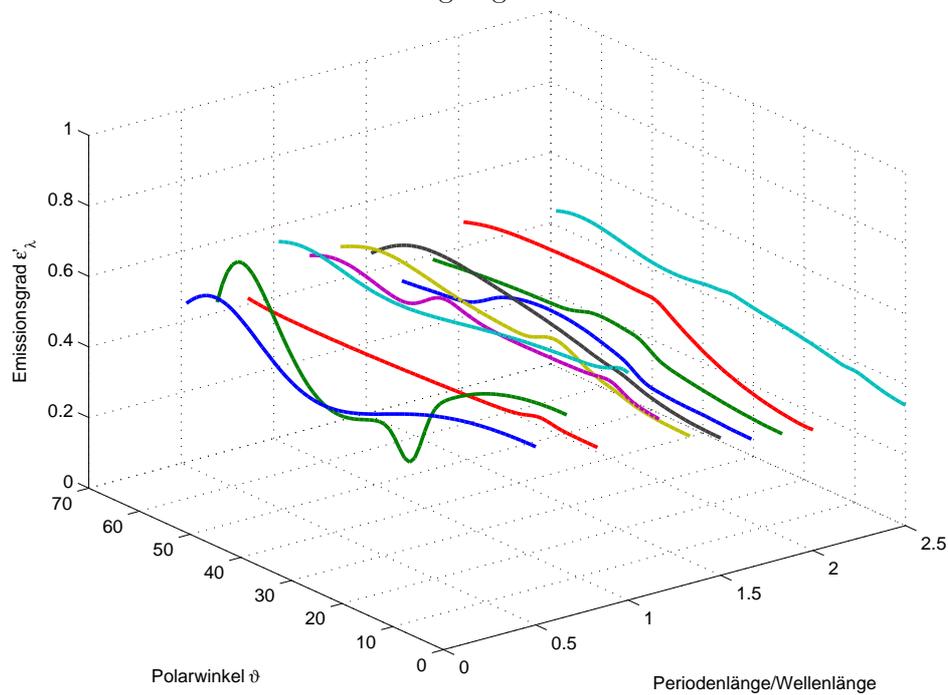


Abb. 5.17 Berechnete spektrale, gerichtete Emissionsgrade für eine Siliziumoberfläche bei einer Wellenlänge von $6 \mu\text{m}$ mit einer konstanten Rinnentiefe von $\Psi = 5 \mu\text{m}$ und verschiedenen Periodenlängen gemäß Tabelle 5.2

sionsgrades für eine Wellenlänge von $6\ \mu\text{m}$ liegt für alle betrachteten Polarwinkel bei ca. 0,3 Punkten. Die Erhöhung für eine Wellenlänge von $8\ \mu\text{m}$ liegt für einen Polarwinkel von 0° bei ca. 0,25 Punkten fällt dann jedoch bis auf 0,06 Punkte bei einem Polarwinkel von 70° kontinuierlich ab. Eine Begründung für diesen Effektunterschied bei den Wellenlängen ist ihre unterschiedliche komplexe Dielektrizitätskonstante. Bei einer Wellenlänge von $6\ \mu\text{m}$ ist die komplexe Dielektrizitätskonstante gemäß Palik [47] $\bar{\epsilon} = -19.636 + 38.349i$ und für eine Wellenlänge von $8\ \mu\text{m}$ ist $\bar{\epsilon} = 9.369 + 10.471i$. Der große negative Realteil der komplexen Dielektrizitätskonstanten bei einer Wellenlänge von $6\ \mu\text{m}$ spricht gemäß Hesketh [27] für das Auftreten von Oberflächenpolaritonen. Diese evaneszenten Wellen treten bei Oberflächen und Wellenlängen auf, bei denen gilt $Re(\bar{\epsilon}) < -1$. Sie werden durch Gitterschwingungen (Phononen) und lokal auftretende Polarisationserscheinungen verursacht. Die Oberflächenpolaritonen treten bei Halbleitern in der Regel im IR-Spektralbereich auf. Durch die Mikrostrukturierung werden sie so gestreut, das sie sich von der Oberfläche lösen und das Fernfeld beeinflussen können. Dieser zusätzlich aus den Oberflächenpolaritonen gespeiste Emissionsstrom ist eine Erklärungsmöglichkeit für die bessere Verstärkung bei einer Wellenlänge von

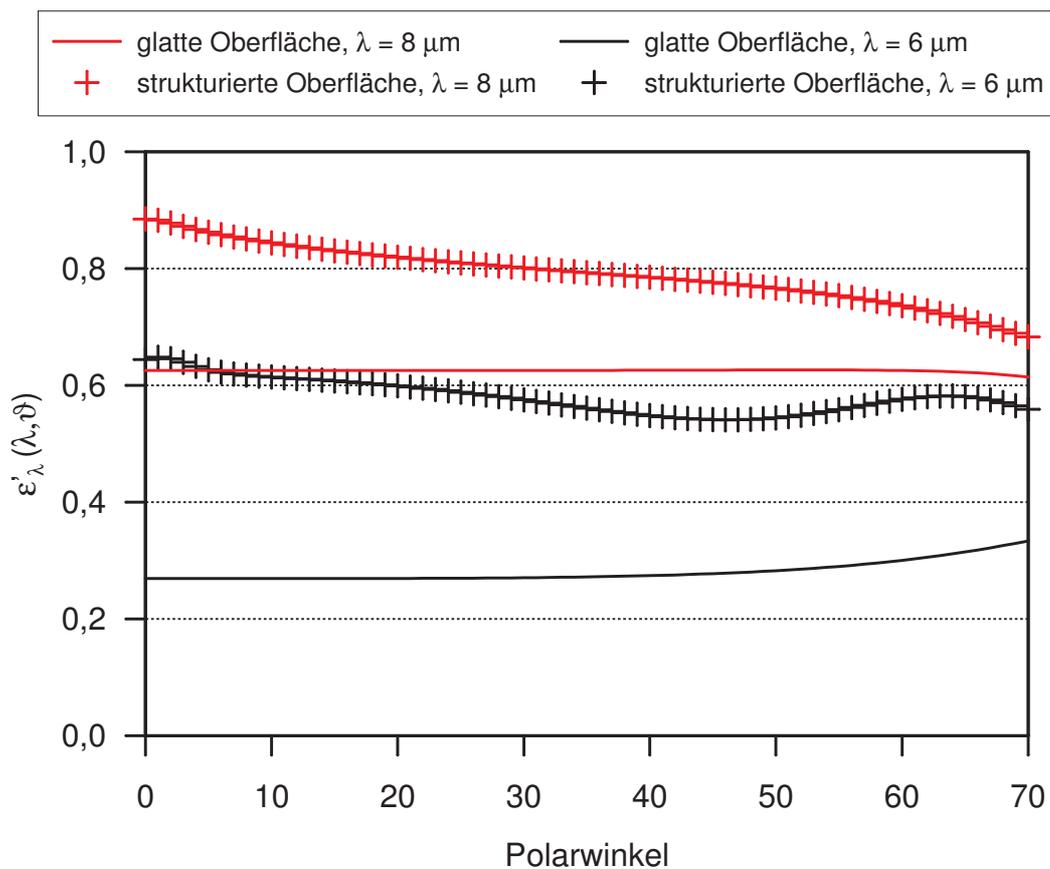


Abb. 5.18 Effekt durch die Strukturierung bei der Periodenlänge und Wellenlänge übereinstimmen.

6 μm . Die Oberflächenwellen können eine hohe Kohärenz aufweisen, die konstruktive Interferenzerscheinungen ermöglicht. Erste Nachweise und Betrachtungen dieser Strahlungsbeeinflussung erfolgten durch die Arbeitsgruppe um J. Greffet ([19], [20], [21]). Als Ergebnis der Berechnungen ist festzuhalten, dass die Mikrostrukturen in der Lage sind, den Emissionsgrad zu beeinflussen. Diese Beeinflussung ist möglich, wenn die Strukturen Abmaße im Bereich der Wellenlänge haben. Eine maximale Verstärkung ergibt sich für den Fall, dass die Periodenlänge der Strukturierung und die Wellenlänge übereinstimmen. Für Oberflächen ist in Wellenlängenbereichen in denen gilt $\text{Re}(\bar{\epsilon}) < -1$ eine besonders gute Beeinflussbarkeit festzustellen. Neben den normal emittierten Wellen entstehen in diesen Bereichen auch Oberflächenwellen, die durch die Strukturierung das Fernfeld zusätzlich beeinflussen können.

5.2 Messergebnisse

Die Darstellung der Messergebnisse in diesem Abschnitt gliedert sich in zwei wesentliche Bereiche. Zum einen werden unterschiedlich bearbeitete Probenhalterungsflächen und ihr Einfluss auf eine glatte, polierte Siliziumprobe untersucht. Im zweiten Teil erfolgt die Beschreibung der Mikrostrukturierung der untersuchten Siliziumproben und die Darstellung der Messergebnisse für die unterschiedlichen mikrostrukturierten Proben.

Für nicht transmissive Proben wird ein schwarzlackierter Probenhalter eingesetzt. Dieser bietet den Vorteil, dass der Wärmetransportwiderstand der Berührfläche zwischen Halter und Probe minimiert wird. In Bereichen, in denen die Probe nicht ganz aufliegt, kommt es zum Wärmetransport durch Strahlung und in diesem Fall ist ein hoher Emissionsgrad von Vorteil. Der gemessene hemisphärische Gesamtemissionsgrad der schwarz lackierten Halterung liegt bei 0,948. Der verwendete Schwarzlack wird als „Nextel-Velvet-Coating 811-21“ von der Firma „Mankiewicz Gebr. & Co“ vertrieben und wird mit einer Lackierpistole ca. 1 mm dick aufgetragen. In Abbildung 5.19 ist der spektrale, gerichtete Emissionsgrad der schwarz lackierten Halterung über den spektralen Bereich von 5 μm bis 25 μm und für Polarwinkel von 0° bis 90° aufgetragen. Die Werte ab einem Polarwinkel von 70° sind dabei extrapolierte Werte und keine Messwerte. Dies gilt auch für alle weiteren dargestellten Ergebnisse. Es ist ein über alle Wellenlängen und alle vermessenen Polarwinkel konstant hoher Wert des Emissionsgrades zu sehen. Der Schwarzlack weist kaum spektrale Abhängigkeiten oder Richtungsabhängigkeiten auf. Im Vergleich zur schwarz lackierten Halterung ist in Abbildung 5.21 der gemessene spektrale, gerichtete Emissionsgrad der verchromten Halterung dargestellt. Es ist allerdings sicher, dass diese Messwerte fehlerhaft sind. Der in der Literatur angegebene hemisphärische Gesamtemissionsgrad für Chrom liegt bei Werten zwischen 0,07 und

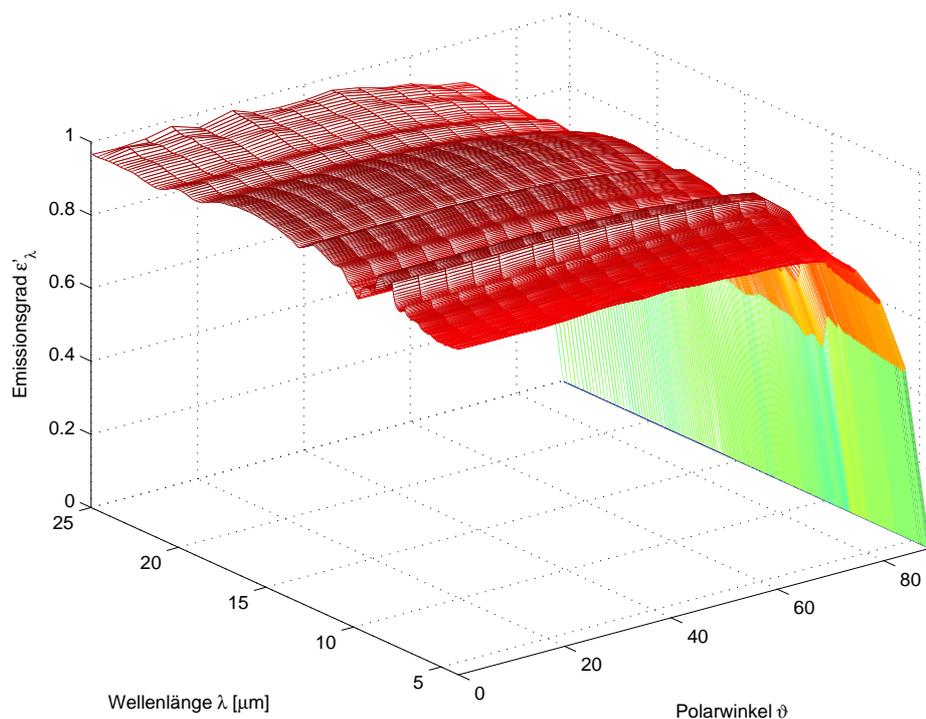


Abb. 5.19 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der schwarz lackierten Halterungsfläche bei einer Oberflächentemperatur von $T_o = 473,12$ K

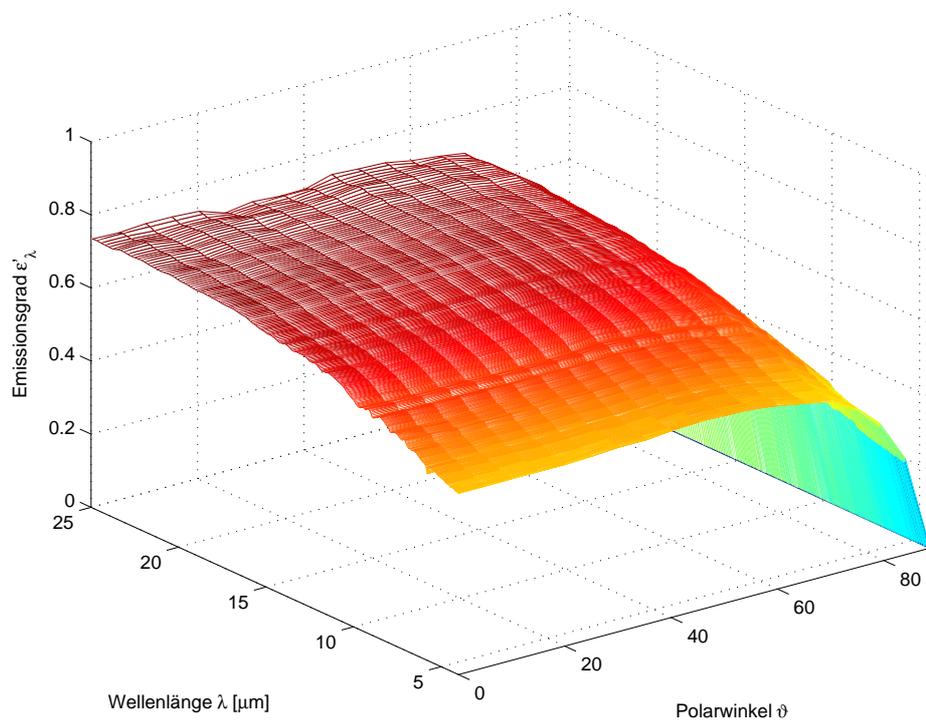


Abb. 5.20 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ einer glatt polierten Siliziumoberfläche bei Nutzung der schwarz lackierten Halterung und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,35$ K

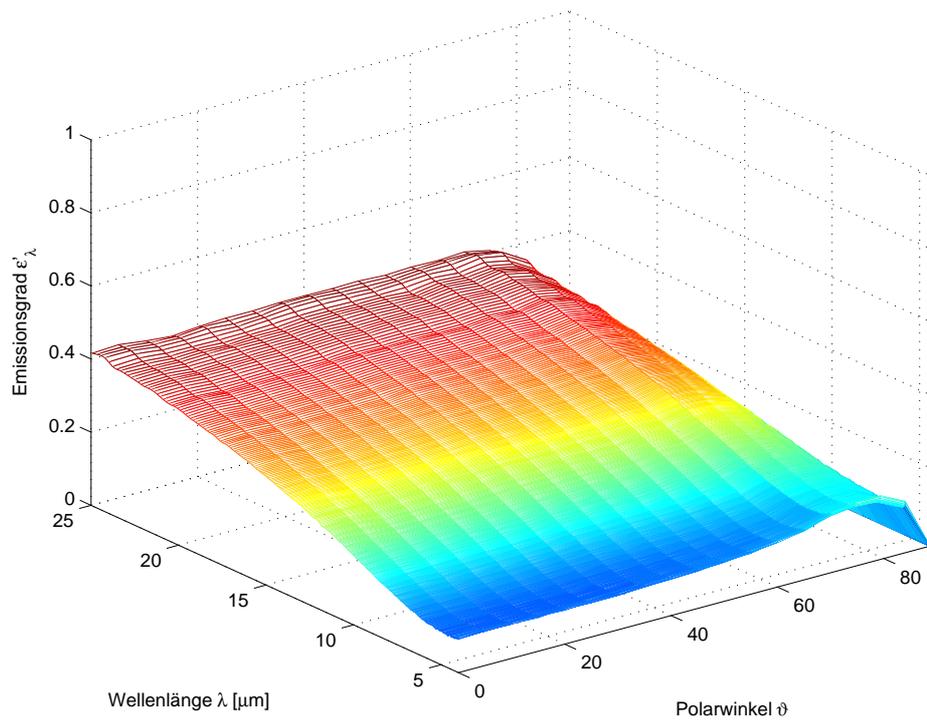


Abb. 5.21 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ε'_{λ} der verchromten Halterungsoberfläche bei einer Oberflächentemperatur von $T_o = 473,12$ K

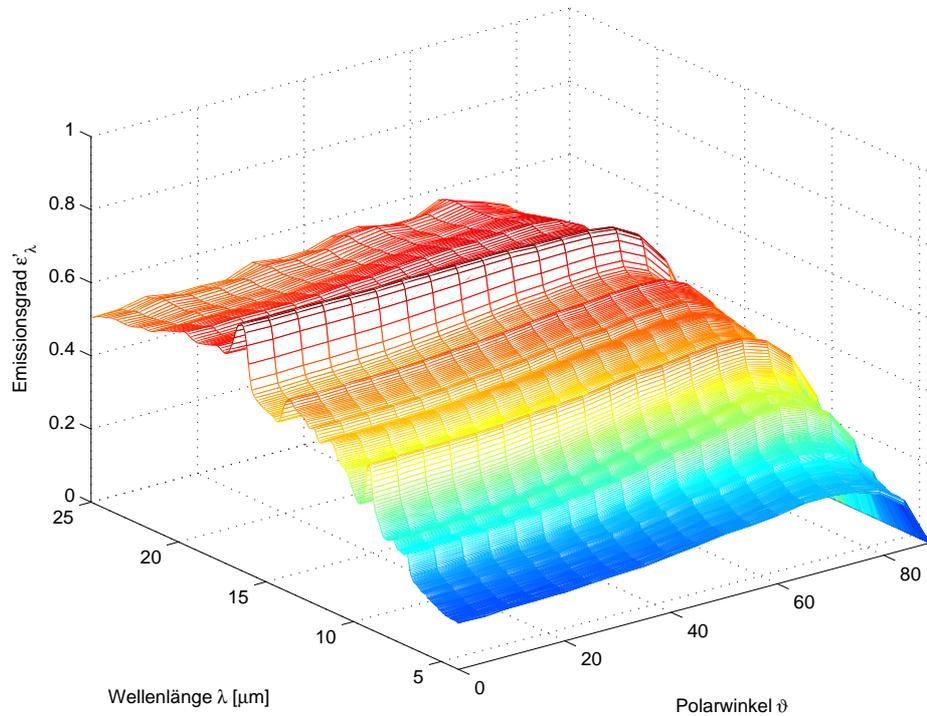


Abb. 5.22 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ε'_{λ} einer glatt polierten Siliziumoberfläche bei Nutzung der verchromten Halterung und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,43$ K

0,09. Die zu messenden Werte liegen damit unterhalb der Messgrenze der realisierten Messanlage. Die Messergebnisse zeigen dennoch, dass die Chromoberfläche genauso wie der Schwarzlack kaum Abhängigkeiten von Wellenlänge und Raumwinkel aufweist. Damit ist die Oberfläche für transmissive Proben geeignet, da ihr Einfluss überall gleichbleibend ist.

Zum Test des Einflusses der Beschaffenheit der Probenhalterungsfläche auf die Messungen von Siliziumproben wird eine glatte, polierte Siliziumprobe einmal mit der schwarz lackierten Probenhalterung und einmal mit der verchromten Probenhalterung vermessen. Das Messergebnis für die schwarz lackierte Halterung ist in Abbildung 5.20 dargestellt. Der starke Einfluss des stark emissiven Probenhalters ist im Vergleich zu dem in Abbildung 5.22 dargestellten Messergebnis für den verchromten Halter deutlich. Während bei der Messung mit dem verchromten Halter ein deutlich variierender spektraler Verlauf zu erkennen ist, ist ein solches Verhalten mit der schwarz lackierten Halterung nicht messbar. Die Messung mit der schwarz lackierten Halterung ergibt außerdem deutlich höhere Emissionsgrade als die Messung mit der verchromten Halterung. Die Transmission der Strahlung des schwarz lackierten Halters verfälscht die Messung der Emissionsgrade der Siliziumoberflächen in einem nicht tolerierbaren Maße, so dass für die weiteren Messungen von Siliziumproben nur der verchromte Probenhal-

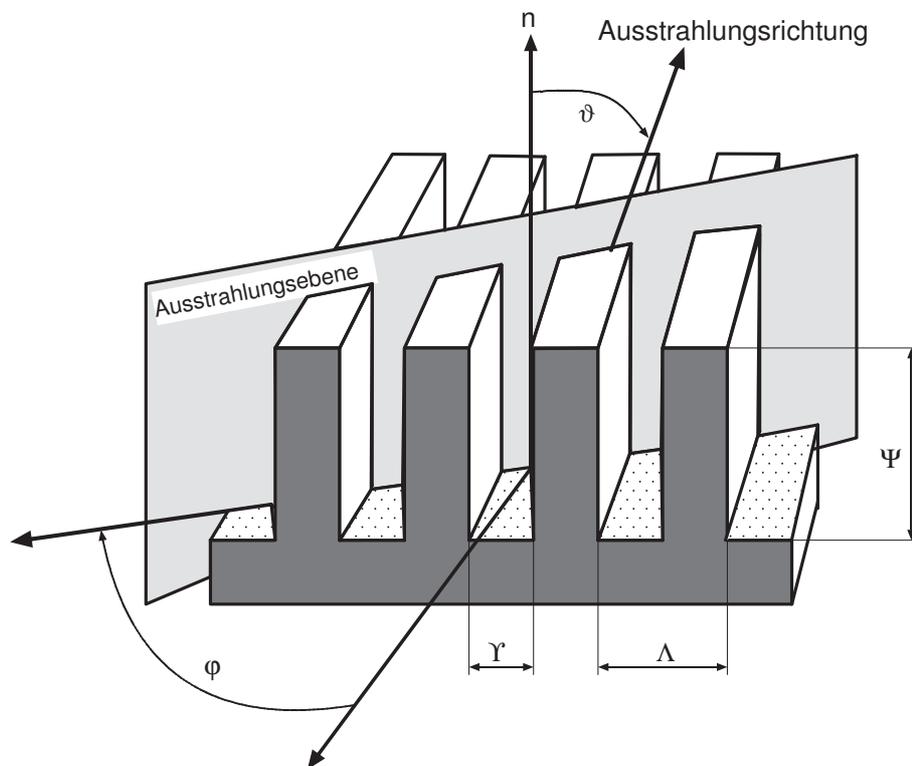


Abb. 5.23 Schematische Darstellung der vermessenen Strukturen

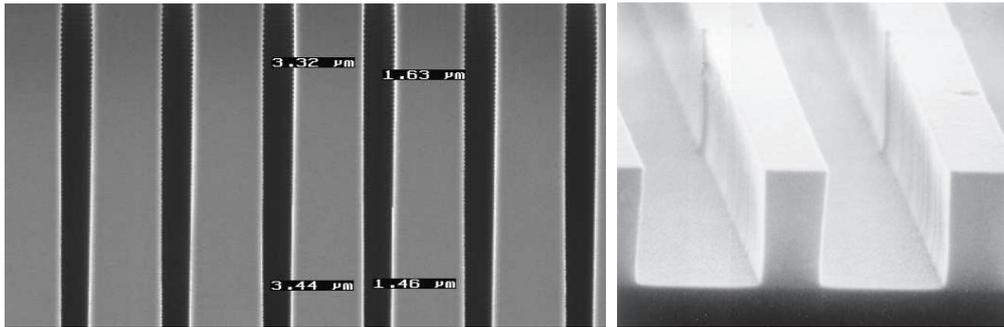


Abb. 5.24 Rasterelektronenmikroskopaufnahme ähnlicher durch das ISIT hergestellter Mikrostrukturen

ter genutzt wird. Hierdurch addieren sich maximal Emissionsgradwerte von 0,05 auf die Messwerte für die Siliziumoberfläche.

Im folgenden erfolgt die Betrachtung der Messergebnisse zu den mikrostrukturierten Proben im Vergleich zu einander und zur glatten, polierten Oberfläche. Die Strukturierung der Siliziumoberflächen ist schematisch in Abbildung 5.23 dargestellt. Es sind jeweils Rechteckstrukturen mit einer Periodenlänge Λ , einer Rinnenbreite Υ und einer Rinnentiefe Ψ in die Siliziumoberflächen eingätzt. Für einen Azimutwinkel von 0° sind die Strukturen parallel zur Polardrehachse. Bei einem Azimutwinkel von 90° sind sie dementsprechend senkrecht zur Polardrehachse ausgerichtet.

Die Proben wurden vom Fraunhofer Institut für Siliziumtechnologie (ISIT) durch das klassische Ätzverfahren hergestellt. Dieses erprobte und gute Verfahren zur Herstellung mikrostrukturierter Oberflächen von Siliziumwafern ist der Grund für die Auswahl des Probenmaterials, obwohl bekannt ist, dass Silizium teilweise transmittiv ist. Die Siliziumwafer haben einen Durchmesser von 150 mm und eine Dicke von 0,6 mm. Sie haben eine polierte und eine unpolierte Seite. Die Strukturen sind auf der polierten Seite eingätzt. Die photolithographisch aufgebrachte Struktur wird durch verschiedene Einwirkzeiten der Ätzchemikalien unterschiedlich tief eingätzt. In Abbildung

Tabelle 5.3 Untersuchte Mikrostrukturierungen.

Probennummer	Tiefe (Mitte) [μm]	Tiefe (Rand) [μm]	Rinnenbreite [μm]	Stegbreite [μm]
1	3,4	3,3	6,3	3,7
2	11,2	11,0	6,3	3,7
3	21,4	21,0	6,4	3,6
4	34,2	33,7	6,5	3,5

5.24 sind Rasterlektronenmikroskopaufnahmen ähnlicher durch das ISIT hergestellter Strukturen dargestellt. Die Flanken sind sehr gut ausgebildet. Der Flankenwinkel ist besser als 88° . Es ist zu erkennen, dass sich die gewünschte Strukturierung gut herstellen lässt. Die hergestellten Mikrostrukturen sind exakt vermessen. Die gemessenen Größenparameter sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst. Die Periodenlänge von $10\ \mu\text{m}$ wurde exakt eingehalten. Die Rinnenbreite und Stegbreite variiert nur geringfügig. Die Proben sind somit bis auf die Rinnentiefe identisch.

Die Messergebnisse der unterschiedlichen Proben werden für einen Azimutwinkel von 0° und einen von 90° dargestellt. Die Darstellung erfolgt jeweils über die Wellenlängen von $5\ \mu\text{m}$ bis $25\ \mu\text{m}$ und über die Polarwinkel von 0° bis 90° .

In den Abbildungen 5.25, 5.27, 5.29 und 5.31 sind die Messergebnisse für die unterschiedlichen Proben bei einem Azimutwinkel von 0° dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Mikrostrukturierung einen deutlichen Einfluss auf die spektralen, gerichteten Emissionsgrade hat. Es ist schon bei der 1. Probe mit der geringsten Rinnentiefe eine deutliche Veränderung zu erkennen. Die Emissionsgradwerte sind über das gesamte Spektrum erhöht. Eine besondere Verstärkung ist im Bereich der Periodenlänge der Oberfläche zu registrieren. Dies stimmt mit den Erkenntnissen aus den REM-Berechnungen überein. Die prinzipielle Änderung des Emissionsverhaltens bleibt auch für die weiteren Proben erhalten. Es ergeben sich jedoch weitere Verstärkungen der Emissionsgradwerte für alle Wellenlängen aufgrund der größeren Rinnentiefen. Allerdings hat die weitere Vertiefung von Probe 3 zu Probe 4 keinen großen Effekt mehr. Auch dieses auf der Rinnentiefe beruhende Verhalten lässt sich in den Messwerten und den REM-Berechnungswerten identifizieren. Zur weiteren Verdeutlichung dieser Aussagen sind in den Abbildungen 5.33 und 5.34 Schnitte durch die 3D-Ergebnisgrafiken dargestellt. In Abbildung 5.33 sind die spektralen gerichteten Emissionsgrade für die unterschiedlichen Strukturierungen für einen Polarwinkel von 0° und für einen Azimutwinkel von 0° zu sehen. Der Einfluss der Strukturierung ist wie zuvor beschrieben zu identifizieren. Entsprechend ist auch für einen Polarwinkel von 45° und einen Azimutwinkel von 0° die Beeinflussung durch die Mikrostrukturierung in Abbildung 5.34 zu erkennen.

Die Messergebnisse der unterschiedlichen Proben bei einem Azimutwinkel von 90° sind in den Abbildungen 5.26, 5.28, 5.30 und 5.32 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass unter einem Polarwinkel von 0° diese Messergebnisse jeweils mit denen der Messung unter einem Azimutwinkel von 0° und einem Polarwinkel von 0° übereinstimmen. Des Weiteren weisen diese Messungen alle ähnliche Verläufe auf, die sich für größere Polarwinkel dem Ergebnis der Messung der glatten, polierten Oberfläche annähern. Dies weist darauf hin, dass die Mikrostrukturierung sich im Wesentlichen auf Wellen, die sich senkrecht zur Strukturierung ausbreiten, auswirkt und parallele Wellen nur gering beeinflusst werden. Der Einfluss der Rinnentiefe ist jedoch ähnlich feststellbar. Es ergeben sich ebenfalls

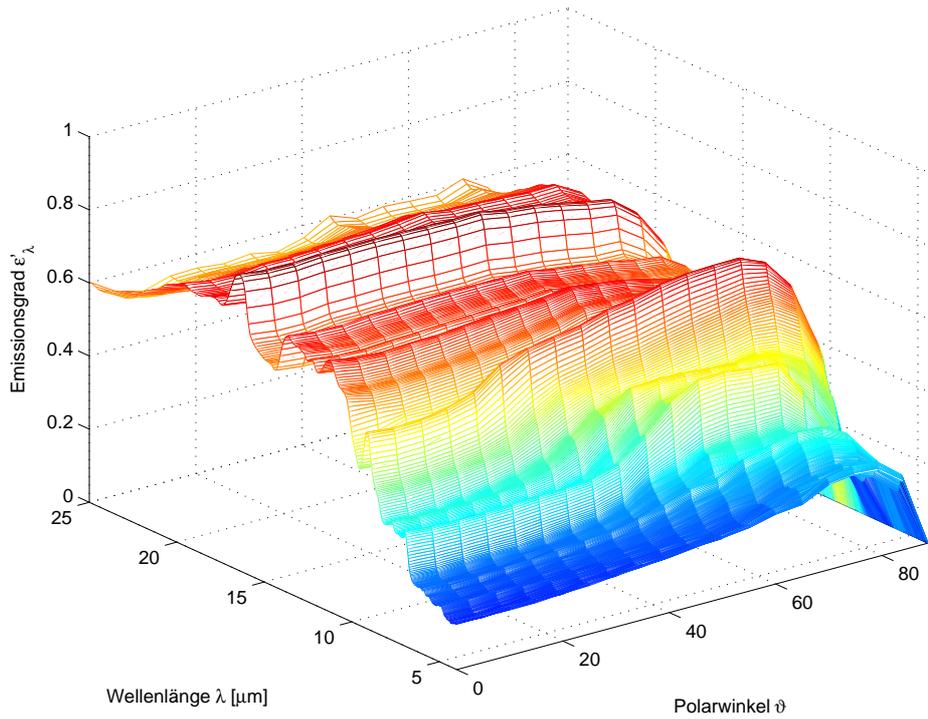


Abb. 5.25 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 1 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 0^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,32 \text{ K}$

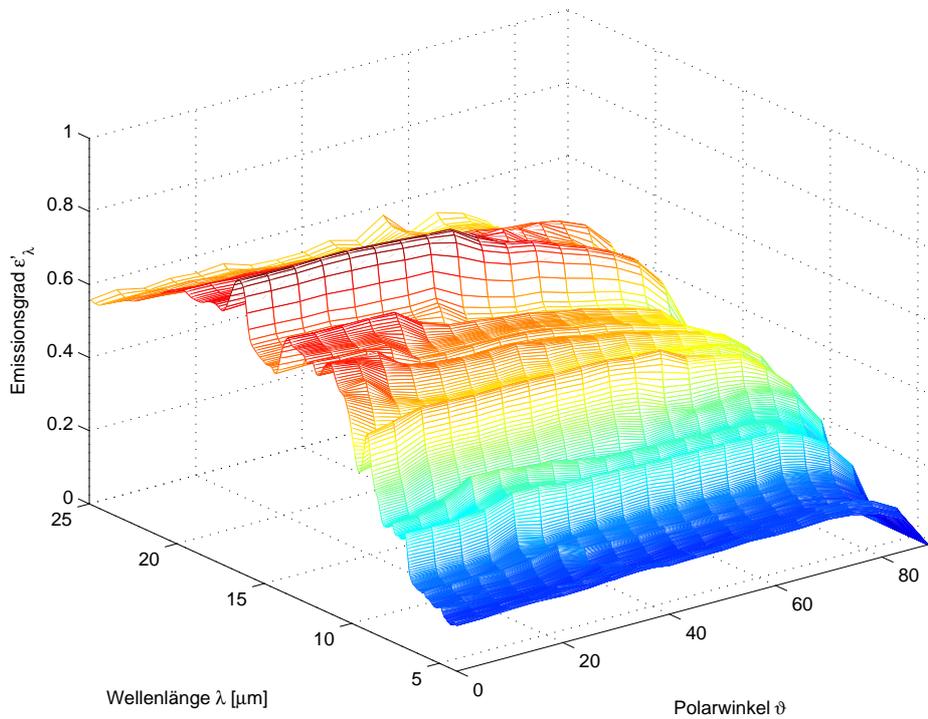


Abb. 5.26 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 1 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 90^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,32 \text{ K}$

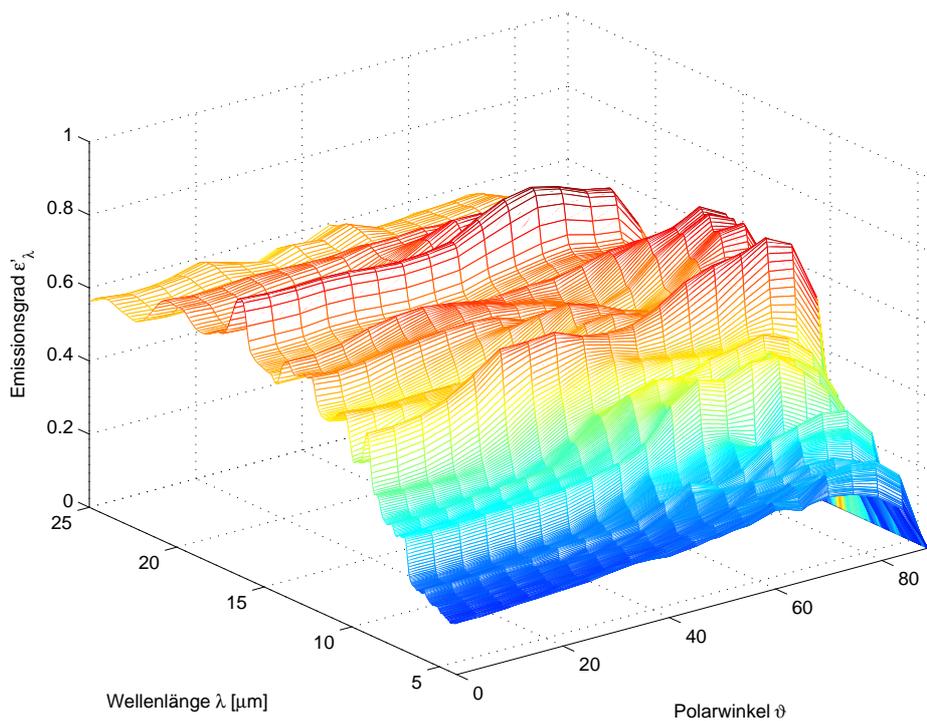


Abb. 5.27 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 2 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 0^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,27 \text{ K}$

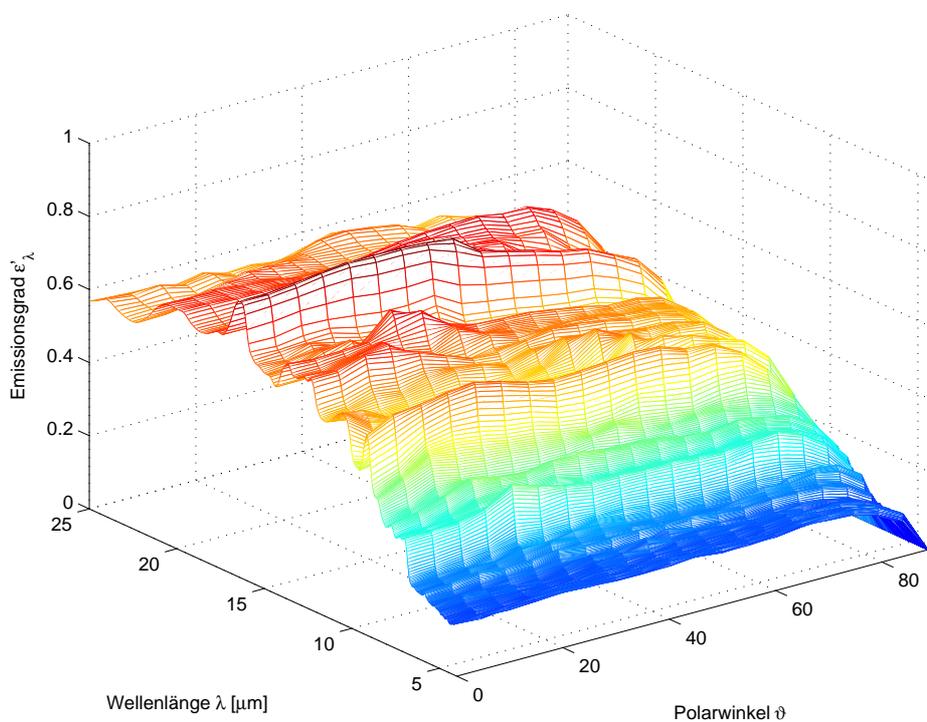


Abb. 5.28 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 2 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 90^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,27 \text{ K}$

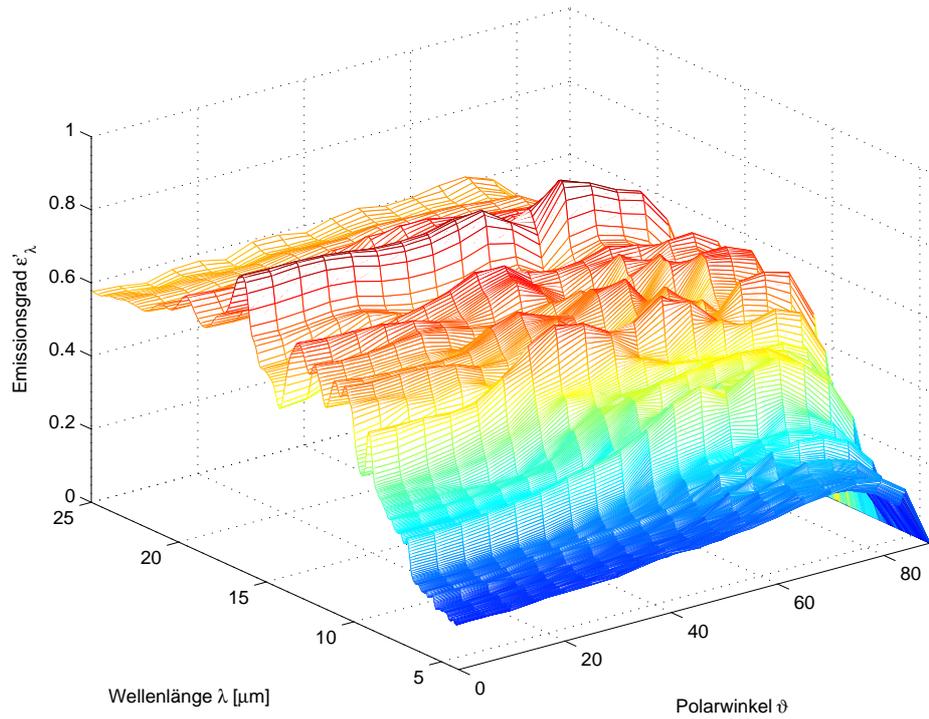


Abb. 5.29 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 3 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 0^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,22 \text{ K}$

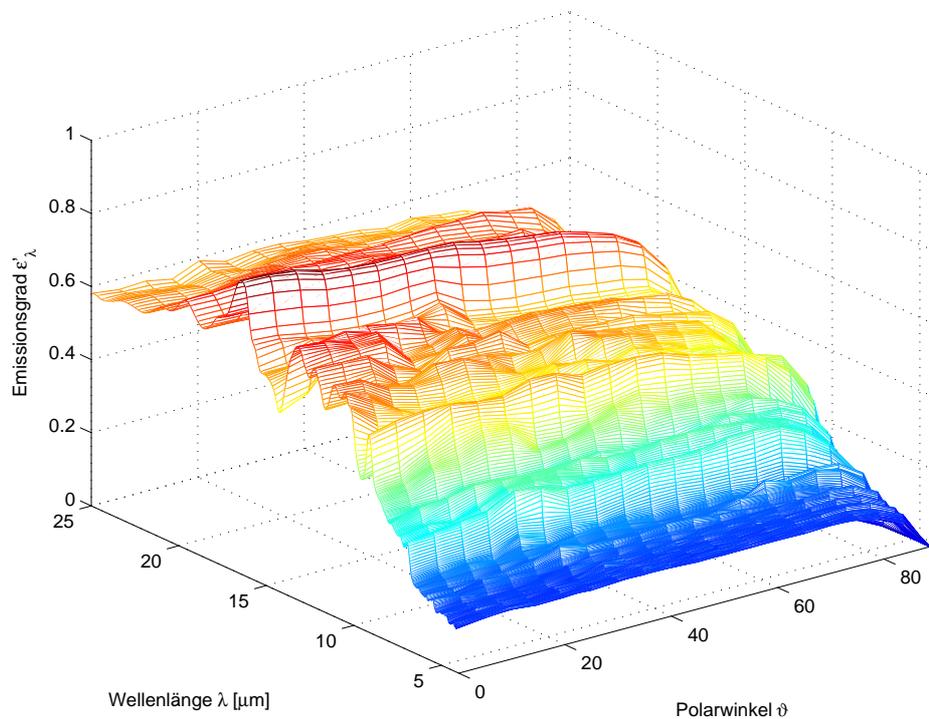


Abb. 5.30 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 3 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 90^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,22 \text{ K}$

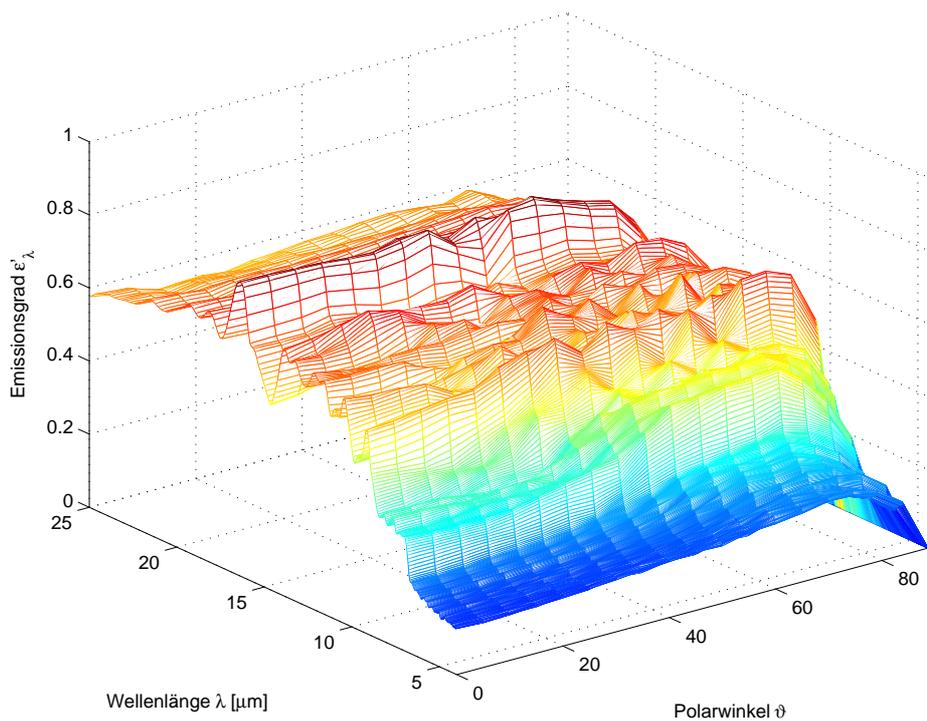


Abb. 5.31 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 4 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 0^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,19$ K

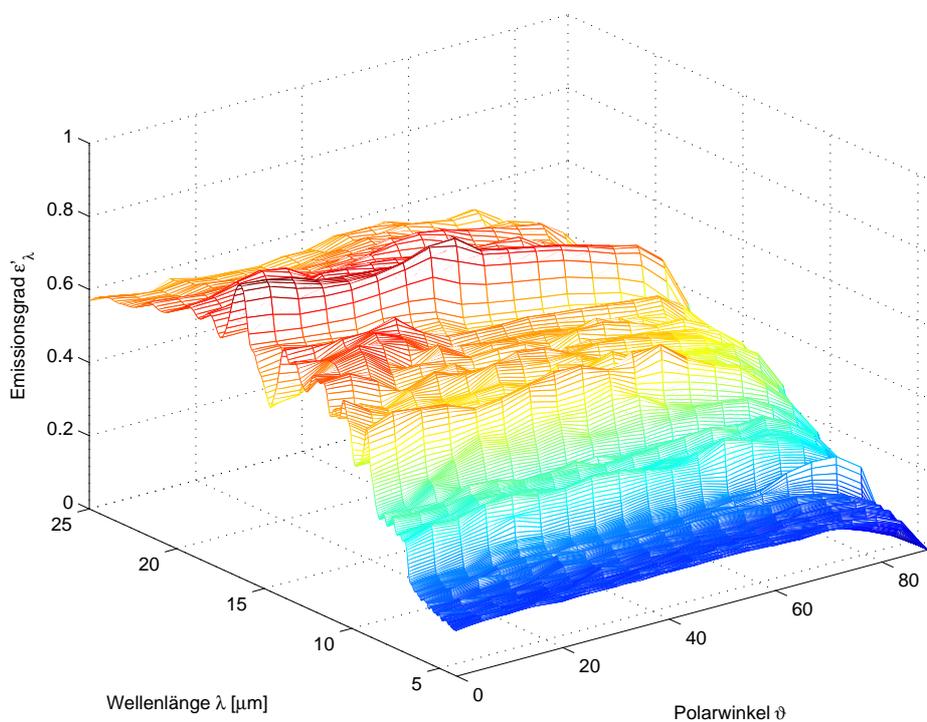


Abb. 5.32 Spektraler, gerichteter Emissionsgrad ϵ'_λ der Siliziumoberfläche mit der Mikrostrukturierung 4 bei einem Azmutwinkel von $\varphi = 90^\circ$ und einer Oberflächentemperatur von $T_o = 470,12$ K

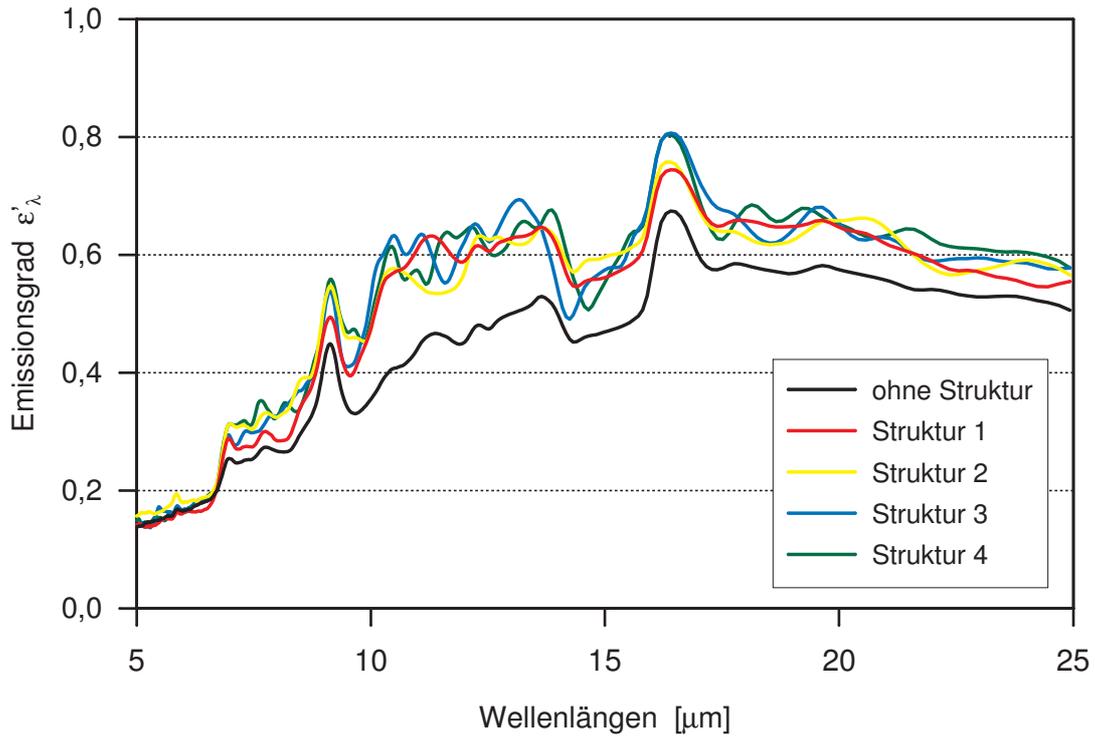


Abb. 5.33 Vergleich der spektralen, gerichteten Emissionsgrade ε'_λ der Siliziumoberflächen mit unterschiedlichen Mikrostrukturierungen bei einem Polarwinkel $\vartheta = 0^\circ$ und einem Azmutwinkel $\varphi = 0^\circ$

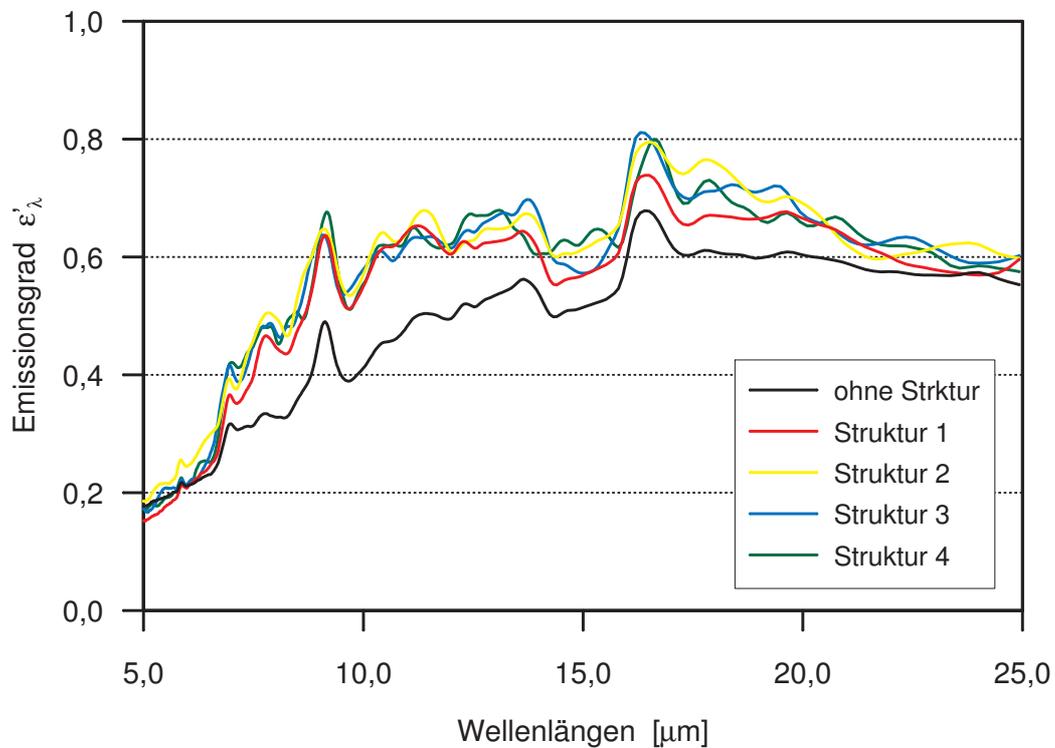


Abb. 5.34 Vergleich der spektralen, gerichteten Emissionsgrade ε'_λ der Siliziumoberflächen mit unterschiedlichen Mikrostrukturierungen bei einem Polarwinkel $\vartheta = 45^\circ$ und einem Azmutwinkel $\varphi = 0^\circ$

für größere Rinnentiefen leicht erhöhte Emissionsgrade über das gesamte Spektrum. Abschließend ist festzustellen, dass ein direkter Vergleich berechneter und gemessener Größen nicht möglich ist, aber dass die Effekte die durch die Mikrostrukturierung auftreten, sowohl mit der REM-Berechnung, als auch mit den Messungen beobachtet werden können. Ein direkter Vergleich der berechneten Werte und gemessenen Werte für eine glatte Siliziumoberfläche ist in Abbildung 5.35 dargestellt. Es ist keine Übereinstimmung feststellbar. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Ein Grund ist dass die komplexen Brechzahlen bei einer Temperatur von 20°C ermittelt wurden und die Messungen bei 200°C erfolgten. Der entscheidende Grund ist jedoch dass nicht sichergestellt ist dass die Proben vergleichbar sind. Die Angaben zur Probenbeschaffenheit bei den Werten der komplexen Brechzahlen ist nicht ausreichend. Es ist nur angegeben, dass es sich um Silizium handelt. Die fehlenden Angaben zur Oberflächenbearbeitung (poliert, matt, bestimmte Oberflächenrauigkeit) sowie die fehlende Angabe zur Kristallorientierung erschweren den Vergleich. Die vermessenen Probenoberflächen sind poliert und weisen eine 100 Kristallorientierung auf.

Ein Vergleich der Änderung der Emissionsgrade durch die Mikrostrukturierung in der Berechnung und der Messung zeigt jedoch dass sich die Änderungen ähnlich verhalten und somit die Art der Beeinflussung durch die Mikrostrukturierung durch die Be-

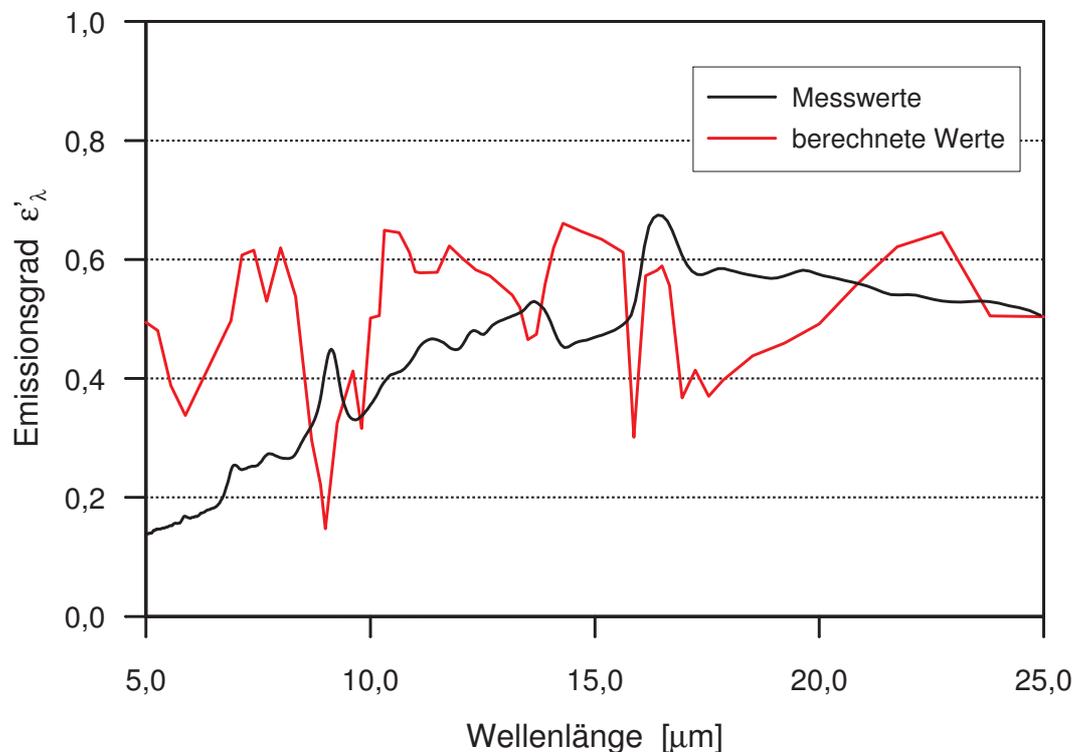


Abb. 5.35 Vergleich der berechneten und gemessenen Emissionsgradwerte für eine glatte Siliziumoberfläche

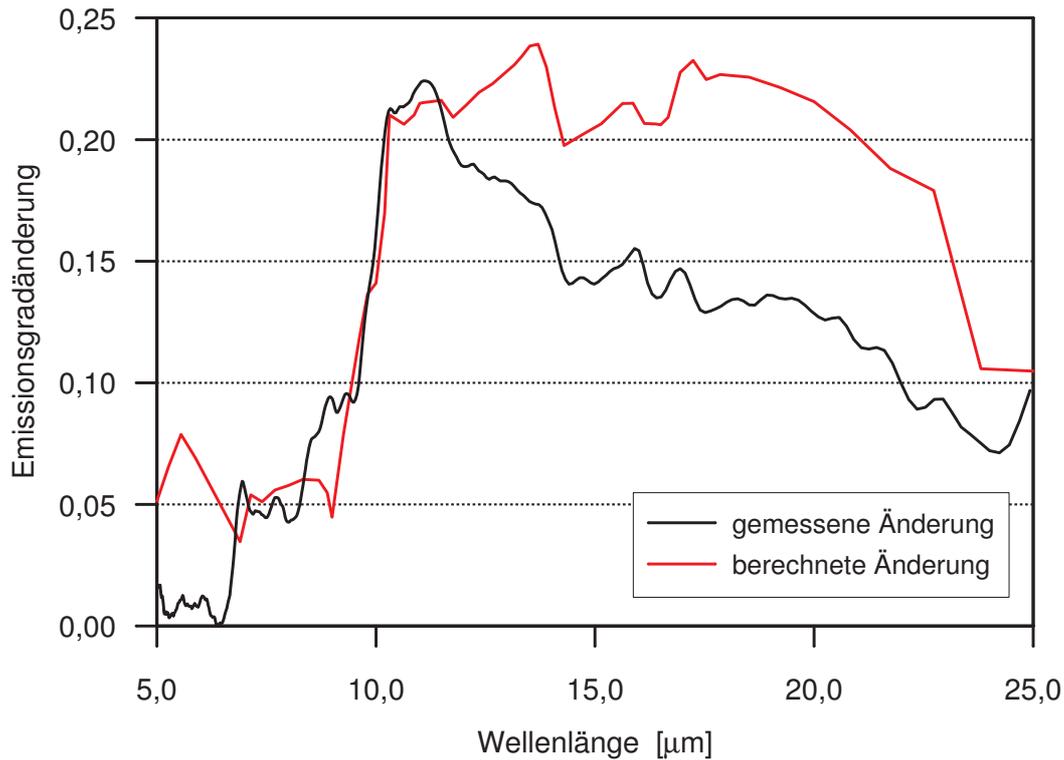


Abb. 5.36 Vergleich der Emissionsgradänderungen durch die Struktur 1

rechnung ermittelbar ist. In Abbildung 5.36 sind Emissionsgradänderungen durch die Struktur 1 für den berechneten und den gemessenen Fall verglichen. Es ergibt sich ein ähnlicher Verlauf der Änderung und vor allem wird der starke Anstieg im Bereich der Periodenlänge von $10\ \mu\text{m}$ durch beide Verfahren gut wiedergegeben.

Zur Beeinflussung des Emissionsgrades durch die Strukturierung muss sie Periodenlängen in der Größenordnung der Wellenlänge aufweisen. Bei Strukturen die Periodenlängen größer als das vierfache der Wellenlänge aufweisen wirken sich die Strukturierungen nicht mehr aus. Eine maximale Verstärkung des Emissionsgrades tritt auf, wenn Periodenlänge und Wellenlänge übereinstimmen. Außerdem beeinflusst die Strukturierung im Wesentlichen nur die Raumwinkelbereiche zu denen sie senkrecht ausgerichtet ist. Eine den spektralen, gerichteten Emissionsgrad maximal verstärkende Struktur sollte daher eine zu allen Raumwinkel senkrecht ausgerichtete Strukturierung aufweisen. Eine Möglichkeit der Realisierung einer solchen Strukturierung wäre die gleichmäßige Verteilung von Zylindern auf der Oberfläche. Die Zylinder sollten eine halbe Wellenlänge als Durchmesser haben und im Abstand von einer Wellenlänge aufgestellt sein.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein Berechnungsverfahren zur Berechnung des Emissionsgrades mikrostrukturierter Oberflächen entwickelt worden. Des Weiteren wurde eine Messapparatur zur Messung des spektralen, gerichteten Emissionsgrades verbessert und automatisiert.

Die Berechnung basiert auf der in Kapitel 3 vorgestellten Bestimmung des Streufeldes, das durch eine auf die modellierte Oberfläche auftreffende Welle erzeugt wird. Die Oberfläche kann hierbei beliebig geformt sein. Die Streuung der einfallenden Welle erfolgt an einer Mediengrenze zwischen dem oberhalb der Oberfläche befindlichem Vakuum und dem Material der Oberfläche. Zur Bestimmung des Emissionsgrades werden die Energien des einfallenden Feldes, des in das Vakuum gestreuten Feldes und des in das Material gestreuten elektromagnetischen Feldes berechnet. Hierzu werden die Feldwerte der p-polarisierten magnetischen Felder und die Feldwerte der senkrecht polarisierten elektrischen Felder berechnet. Für diese Feldwertberechnungen werden die nach der Maxwell'schen Theorie auftretenden partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung der elektromagnetischen Wellen numerisch mit der Randelementenmethode (REM) gelöst. Die hierzu notwendigen analytischen Vorüberlegungen inklusive der Bestimmung der Fundamentallösung und Einarbeitung der Randbedingungen werden ebenso detailliert beschrieben wie die Realisierung des REM-Verfahrens. In Weiterentwicklung bisheriger in der Literatur dargestellter Berechnungen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit eine vollständige Diskretisierung der Medientrenngrenze auch entlang steiler Flanken. Die Stärke des einfallenden Feldes wird über die berechnete Oberfläche normalverteilt, so dass verfälschende Randeffekte keinen Einfluss auf die Berechnung haben. Die Berechnung des Emissionsgrades erfolgt schließlich, in dem die berechneten Energien des einfallenden Feldes und der Streufelder genutzt werden, um Reflektionsgrade und Transmissionsgrade zu berechnen. Der spektrale gerichtete Emissionsgrad ergibt sich dann aus der Subtraktion des spektralen gerichteten Reflektionsgrads und des spektralen gerichteten Transmissionsgrads von 1.

Die Rechnungen zur Validierung des realisierten REM-Verfahrens werden in Abschnitt 5.1.1 beschrieben. Es wird festgestellt, dass das Verfahren bei einer Mindeststützstellenanzahl von 50 Stützstellen pro Wellenlänge die Emissionsgradwertberechnung bis zu Polarwinkeln von 70° ermöglicht. Die Rechnungen zu den mikrostrukturierten Oberflächen liefern die in Abschnitt 5.1.2 dargestellten Ergebnisse. Es wird eine deutliche Beeinflussung des Emissionsverhaltens berechnet für Strukturen, die Abmaße im Bereich der einfallenden Wellenlänge haben. Für Strukturen, deren Periodenlänge das

vierfache der Wellenlänge überschreitet, sind kaum noch Veränderungen gegenüber einer unstrukturierten Probe berechenbar. Eine maximale Verstärkung ergibt sich für die Bereiche, in denen Wellenlänge und Periodenlänge übereinstimmen. Diese Verstärkung fällt noch stärker aus für spektrale Bereiche, in denen der Realteil der komplexen Dielektrizitätskonstanten kleiner als -1 ist, da hier auftretende Oberflächenwellen noch stärker mit der Oberflächenstrukturierung zusammenwirken. Der Effekt durch eine Variation der Rinnentiefen ist nur von geringer Natur. Für größere Tiefen ergeben sich leichte Erhöhungen der Emissionsgrade über das gesamte Spektrum. Die Verstärkung pro μm tiefere Rinne nimmt jedoch schon bei Rinnentiefen von $20\ \mu\text{m}$ auf ein Maß ab, das unterhalb der Rechengenauigkeit liegt.

Zur Überprüfung dieser aus den REM-Berechnungen gewonnenen Erkenntnissen werden mit der in Kapitel 4 beschriebenen Messapparatur mikrostrukturierte Siliziumproben vermessen. Das Messverfahren ist eine statische, radiometrische Methode, bei der die Probenausstrahlung mit der eines Hohlraumstrahlers bei gleicher Temperatur verglichen wird. Die Versuchsanlage ist so konzipiert, dass die Messung gerichteter, spektraler Emissionsgrade in einem Wellenlängenbereich von $5\ \mu\text{m}$ bis $25\ \mu\text{m}$ möglich ist. Mit der realisierten Anlage sind diese spektralen Messungen in einem Polarwinkelbereich von 0° bis 70° und einem Azimutwinkelbereich von 0° bis 90° durchführbar. Der Messtemperaturbereich erstreckt sich von $370\ \text{K}$ bis $550\ \text{K}$. Zur Detektierung der Ausstrahlung der Probe und des Hohlraumstrahlers wird ein FTIR-Spektrometer eingesetzt. Eine genaue Untersuchung der Kalibrierung der Messanlage ergibt die in Abbildung 4.19 dargestellten Messgrenzen. Die zu vermessenden Emissionsgrade der zu untersuchenden Proben müssen oberhalb dieser Messgrenzen liegen. Die Automatisierung der Messapparatur und der anschließenden Messwertauswertung ermöglicht die Messung der spektralen, gerichteten Emissionsgrade mit einer hohen spektralen und räumlichen Auflösung.

Die in Abschnitt 5.2 dargestellten Messergebnisse stützen die Erkenntnisse aus den Berechnungen. Es ist deutlich die Beeinflussung der Emissionsgrade durch die Mikrostrukturierung zu erkennen. Die stärksten Verstärkungen sind ebenfalls in jenem Wellenlängenbereich zu finden, in dem die Periodenlänge der untersuchten Proben und die Wellenlänge übereinstimmen. Die Rinnentiefe wirkt sich entsprechend wie durch die Berechnungen vorhergesagt aus und erhöht den Emissionsgrad über das gesamte Spektrum. Die weitere Verstärkung für Tiefen größer $20\ \mu\text{m}$ ist entsprechend der Berechnungen nur gering. Ein weiterer Effekt, der beobachtet werden kann, ist dass die Beeinflussung durch die Mikrostrukturierung für einen Azimutwinkel von 0° über alle Polarwinkel wirkt, während bei einem Azimutwinkel von 90° für größere Polarwinkel nur noch eine geringe Beeinflussung messbar ist. Diese Beobachtung bestätigt die Annahme, dass es im Wesentlichen mit quer zur Strukturierung laufenden Wellen zu

Interferenzeffekten zwischen Struktur und elektromagnetischer Welle kommt.

Zur weiteren Untersuchung der Effekte ist es sinnvoll weitere Parameterstudien mit weiteren Strukturierungen durchzuführen. Es sollten sowohl Rechnungen als auch Messungen erfolgen.

Um entsprechend in mehrere Richtungen mikrostrukturierte Oberflächen berechnen zu können, ist eine Erweiterung der Rechnung auf 3D Strukturen mit einem 2D-Rand nötig. Hierzu, und zur Verbesserung der bisherigen Rechnungen, ist es wichtig nach Möglichkeiten zu suchen größere Stützstellenzahlen zu realisieren.

Die Messapparatur sollte so weiterentwickelt werden, das eine höhere und besser reproduzierbare Genauigkeit bei Erweiterung des Messbereichs erreicht wird. Eine Erweiterung des spektralen Messbereichs ist durch Einsatz anderer optischer Bauelemente, die andere Wellenlängenbereiche unterstützen, möglich.

Ein Herabsetzen der Messgrenzen kann durch den Einsatz eines stickstoffgekühlten Detektors realisiert werden. Dieser Detektor sollte Messungen von Emissionsgraden bis hinunter zu 0,01 bei Oberflächentemperaturen von 100°C erlauben. Ein Einbau solch eines Detektors erfordert jedoch genauso wie die Steigerung der Reproduzierbarkeitsgenauigkeit eine bessere Entkopplung der Messapparatur von der Umgebungstemperatur. Der Versuchsraum ist hierzu besser zu klimatisieren oder die Anlage selbst ist durch Isolierungen und weitere Thermostaten besser zu thermostatisieren.

Zur Minimierung der größten Fehlerquelle, der Dejustage der optischen Ausrichtung, ist bei Umbauten auf eine Verbesserung der optischen Justierbarkeit der Anlage zu achten.

Anhang

A Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

Eine mögliche Bedingung für die Lösung einer Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (\text{A.1})$$

stellt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung dar. Die Wellengleichung vereinfacht sich für den eindimensionalen Fall auf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (\text{A.2})$$

Eine Lösung dieser Gleichung wird d'Alembertsche Lösung genannt und lässt sich in allgemeiner Form darstellen als

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) = f_1(\eta) + f_2(\zeta) . \quad (\text{A.3})$$

Hierbei gelten für die Teillösung f_1 die folgenden Zusammenhänge.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{-c} \end{array} \right\} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

Die mit diesen Gleichungen dargestellten Beziehungen gelten analog für f_2 . Die Funktionen f_1 und f_2 stellen dabei Wellen dar. Eine in positive x-Richtung laufende Welle wird durch die Teillösung $f_1(\eta)$ beschrieben. Die in negative x-Richtung laufende Welle wird durch die Teillösung $f_2(\zeta)$ beschrieben. Für diese Wellen lassen sich Differentialgleichungen aufstellen, so ergibt sich für die in positive Richtung laufende Welle die Differentialgleichung

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} = -c \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \end{array} \right\} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = -c \frac{\partial f_1}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial t} + c \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Die Differentialgleichung der in negative Richtung laufenden Welle ergibt sich analog zu

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - c \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 . \quad (\text{A.6})$$

Mit kreisförmigen oder kugelförmigen Wellen lassen sich die 2D- und 3D-Fälle beschreiben. Die Wellen breiten sich dabei in positiver oder negativer Radialrichtung aus. Eine in positive Radialrichtung laufende Welle lässt sich entsprechend der vorhergehenden Betrachtungen mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0 . \quad (\text{A.7})$$

beschreiben. Diese Gleichung wird als Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen bezeichnet. Sie stellt eine Bedingung dar, da sie im allgemeinen von einer Lösung der Feldgleichung nicht im gesamten Gebiet, sondern nur für $r \rightarrow \infty$ erfüllt werden kann. Im Rahmen der Herleitung der Fundamentallösung wird eine entsprechende Frequenzformulierung genutzt, die lautet

$$i \omega f + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0 . \quad (\text{A.8})$$

B Darstellung von Schwingungen in der komplexen Ebene

Eine harmonische Schwingung lässt sich beschreiben durch die Funktion

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) . \quad (\text{B.1})$$

Die Abbildung B.1.a stellt diese Funktion im Zeitbereich dar. Die Schwingungsamplitude wird durch den Wert von A vorgegeben. Die Kreisfrequenz ω ergibt multipliziert mit der Zeit t und durch Addition des Nullphasenwinkels ϕ die so genannte Phase oder auch den Phasenwinkel $\omega t + \phi$. Die Periode oder Schwingungsdauer T wird dabei gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (\text{B.2})$$

Diese Schwingung kann in der komplexen Ebene wie in Abbildung B.1.b dargestellt beschrieben werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erhält man den Zeiger $\bar{z}(0) = A e^{i\phi}$. Für Zeitpunkte $t > 0$ rotiert der Zeiger \bar{z} mit einer Winkelgeschwindigkeit ω . Dies entspricht einer Drehung des Zeigers \bar{z} um den Winkel ωt um den Ursprung. Dementsprechend erhält man zum Zeitpunkt t den Zeiger $\bar{z}(t) = A e^{i(\omega t + \phi)}$. Die y-Komponenten der Schwingung ergeben sich bei dieser Art der Darstellung aus dem Imaginärteil des Zeigers \bar{z} . Es gilt demnach

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) = \text{Im}(\bar{z}) . \quad (\text{B.3})$$

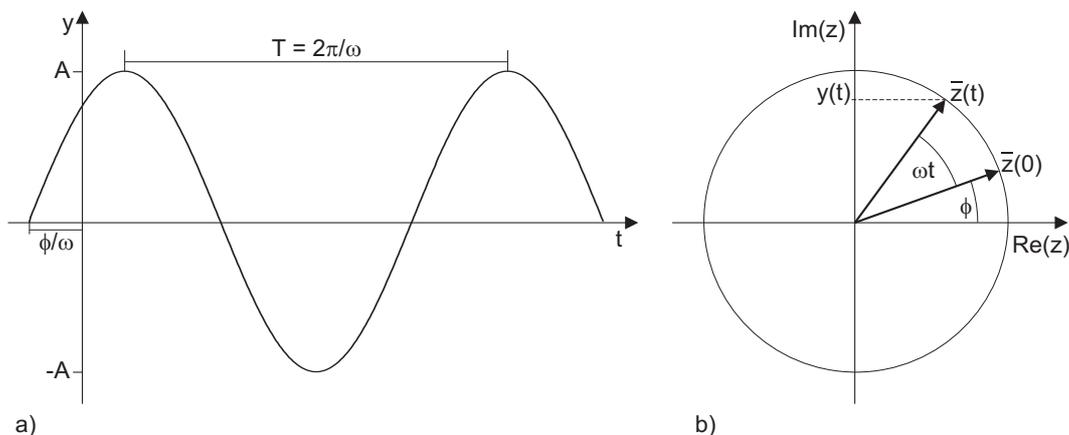


Abb. B.1 a) Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeitbereich
 b) Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm der komplexen Ebene

Der zeitunabhängige Teil von \bar{z} ist die komplexe Amplitude $\bar{A} = A e^{i\phi}$. Sie legt die Anfangslage von \bar{z} im Zeigerdiagramm fest. Die Zeitfunktion $e^{i\omega t}$ stellt die Rotation von \bar{z} um den Ursprung der komplexen Ebene dar.

Bei der Betrachtung von zeitharmonischen Vorgängen entfällt die Zeitfunktion. Zur Beschreibung einer Wellenamplitude an einem bestimmten Ort wird lediglich die komplexe Amplitude benötigt. Dies ermöglicht die Beschreibung einer 3D-Welle in einem 2D-Koordinatensystem, so wie es im Rahmen dieser Arbeit genutzt wird.

C Datensammlung zu komplexen Brechzahlen

Tabelle C.1 Komplexe Brechzahlen von Silizium nach Palik [47]

λ [μm]	n	k		λ [μm]	n	k
4	3,431	1,30e-08		12,35	3,421	1,97
5	3,426	1,99e-07		12,66	3,421	2,07
5,263	3,426	2,97		13,16	3,421	2,39
5,556	3,426	3,94		13,16	3,421	2,39
5,882	3,426	4,17		13,33	3,421	2,59
6	3,424	5,6		13,51	3,421	3,12
6,250	3,424	8,46e-07		13,70	3,421	3,03
6,667	3,424	2,66e-06		13,89	3,421	2,21
6,897	3,424	2,45e-05		14,08	3,421	1,57
7,143	3,423	1,68		14,29	3,421	1,02
7,402	3,423	1,62		14,71	3,421	1,25
7,692	3,423	2,49		15,15	3,421	1,41
8	3,422	1,53		15,63	3,421	1,64
8,333	3,422	2,41		15,87	3,421	5,05
8,696	3,422	5,13		16,13	3,421	9,63e-04
8,889	3,422	6,44		16,39	3,421	1,11e-03
9	3,422	8,46		16,5	3,421	1,25e-03
9,259	3,422	4,72		16,67	3,421	7,16e-04
9,615	3,422	3,67		16,95	3,421	4,18
9,804	3,422	4,84		17,24	3,421	3,65
10	3,422	6,76e-05		17,54	3,421	4,15
10,2	3,422	1,09e-04		17,86	3,421	3,84
10,31	3,422	1,22		18,52	3,421	3,4
10,64	3,422	1,27		19,23	3,42	3,18
10,87	3,422	1,66		20	3,42	2,86
11	3,421	2		20,83	3,42	2,22
11,11	3,421	2,02		21,74	3,42	1,56
11,49	3,421	2,01		22,73	3,42	1,27
11,76	3,421	1,53		23,81	3,42	1,06e-04
12,05	3,421	1,77		25	3,42	9,15e-05

D Die Hankel Funktion

Die Hankel Funktion bildet den wesentlichen Teil der im Rahmen dieser Arbeit genutzten Fundamentallösung. Sie stellt eine Besselsche Funktion dritter Gattung dar, die sich mit der folgenden Beziehung berechnen lässt.

$$H_0^{(1)}(\bar{z}) = J_0(\bar{z}) + iY_0(\bar{z}) \quad (\text{D.1})$$

Die Funktion $J_0(\bar{z})$ ist hierbei eine Besselsche Funktion erster Gattung 0. Ordnung. Der Term $Y_0(\bar{z})$ steht für eine Besselsche Funktion zweiter Gattung 0. Ordnung.

Dementsprechend stellen die Abbildungen des Realteils und des Imaginärteils der Hankel Funktion in den Abbildungen D.1 und D.2 die Besselsche Funktion erster Gattung 0. Ordnung $J_0(\bar{z})$ und die Besselsche Funktion zweiter Gattung 0. Ordnung $Y_0(\bar{z})$ dar. Das Verhalten für kleine Werte von $\bar{z} \rightarrow 0$ ist deutlich zu erkennen. Die Besselsche Funktion erster Gattung 0. Ordnung $J_0(\bar{z})$ hat einen Grenzwert von 1. Der Wert der Besselschen Funktion zweiter Gattung 0. Ordnung $Y_0(\bar{z})$ geht gegen $-\infty$. Bei Abramowitz [1] finden sich entsprechend folgende Werte und Grenzwerte für die Besselschen

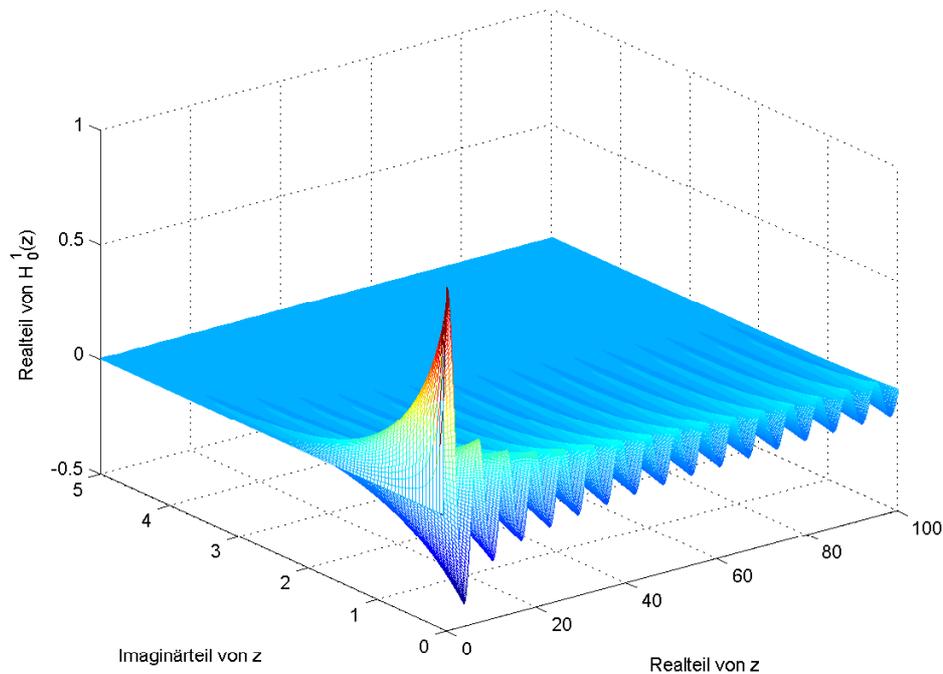


Abb. D.1 Realteil der Hankel Funktion und somit die Besselsche Funktion erster Gattung 0. Ordnung $J_0(\bar{z})$

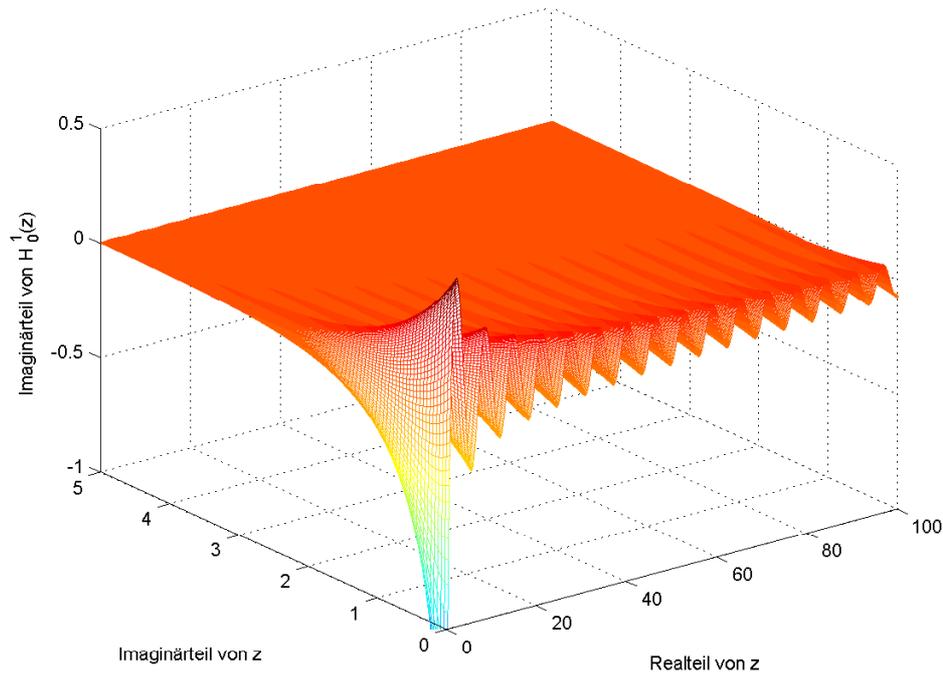


Abb. D.2 Imaginärteil der Hankel Funktion und somit die Besselsche Funktion zweiter Gattung 0. Ordnung $Y_0(\bar{z})$

Funktionen.

$$J_0(0) = 1 \quad , \quad \lim_{\bar{z} \rightarrow 0} Y_0(\bar{z}) = \frac{2}{\pi} \ln \bar{z} \quad (\text{D.2})$$

Desweiteren ist zu sehen, das für Werte von \bar{z} mit vorhandenem Imaginärteil die Funktionswerte für beide Besselschen Funktionen stark abfallen. Hierdurch wird es ermöglicht das Absorptionsverhalten von absorptiven Oberflächen abzubilden.

Literaturverzeichnis

- [1] **Abramowitz, M.; Stegun, I. A.:** *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1970.
- [2] **Baehr, H.D.; Stephan, K.:** *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [3] **Bauer, G.:** *Reflexionsmessungen an offenen Hohlräumen*, PTB Mitteilungen, Optik 18, Heft 12, S. 603-622, 1961.
- [4] **Born, M.; Wolf, E.:** *Principles of optics*, 4. Auflage, Pergamon Press, London, 1970.
- [5] **Born, M.:** *Optik*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [6] **Bracewell, R.:** *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [7] **Brebbia, C.A.:** *Boundary Element Techniques*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [8] **Brewster, M.Q.:** *Thermal Radiative Transfer & Properties*, John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [9] **Burk, T.:** *Überprüfung der Reproduzierbarkeit von Strahlungsenergiemessungen*, Studienarbeit, HSU-HH Institut für Thermodynamik, 2006.
- [10] **Burk, T.:** *Messung und Auswertung von spektralen gerichteten Emissionsgraden zur Kalibrierung von Strahlungsmessapparaturen*, Diplomarbeit, HSU-HH Institut für Thermodynamik, 2006.
- [11] **Cohn, D.W.; Tang, K.; Buckius, R.O.:** *Comparison of theory and experiments for reflection from microcontoured surfaces*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, No. 13, S. 3223-3235, 1997.
- [12] **Collett, E.:** *Polarized Light*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.
- [13] **Dimenna, R.A.; Buckius, R.O.:** *Electromagnetic Theory Predictions of the Directional Scattering From Triangular Surfaces*, J. of Heat Transfer, August 1994, Vol. 116, S. 639-645, 1994.
- [14] **Fetzer, J.; Hass, M.; Kurz, S.:** *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder*, Expert Verlag, Renningen-Malmsheim, 2002.
- [15] **Gaul, L.; Fiedler, C.:** *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1997.
- [16] **Meschede, D.:** *Gerthsen Physik*, 21. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [17] **Ghoul, M.:** *Messen und Auswerten von Emissionsgraden im infraroten Bereich*, Diplomarbeit, HSU-HH Institut für Thermodynamik, 2005.

-
- [18] **Gray, D.E.:** *American Institute of Physics Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [19] **Greffet, J.J.; Carminati, R.:** *Near-field effects in spatical coherence of thermal sources*, Phys. Rev. Letters 82, S. 1160, 1999.
- [20] **Greffet, J.J.; Carminati, R.; Joulain, K.; Henkel, C.:** *Spatical coherence of thermal near fields*, optics Communications 186, S. 57 - 67, 2000.
- [21] **Greffet, J.J.; Carminati, R.; Joulain, K.; Mulet, J.P.; Mainguy, S.; Chen, Y.:** *Coherent emission of light by thermal sources*, Nature 416, S. 61 - 64, 2002.
- [22] **Grohmann, U.:** *Messung und Auswertung von spektralen gerichteten Emissionsgraden*, Studienarbeit, HSU-HH Institut für Thermodynamik, 2007.
- [23] **Griffiths, P.R.:** *Fourier Transform Infrared Spectrometry*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [24] **Haferkorn, H.:** *Optik*, WILEY-VCH Verlag, Weinheim, 2003.
- [25] **Hafner, C.:** *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [26] **Henke, H.:** *Elektromagnetische Felder*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [27] **Hesketh, P.J.; Zemel, N.; Gebhart, B.:** *Organ pipe radiant modes of periodic micromachined silicon surfaces*, Nature 324, S. 549 - 551, 1986.
- [28] **Jakobus, U.:** *Erweiterte Momentenmethode zur Behandlung kompliziert aufgebauter und elektrisch großer elektromagnetischer Streuprobleme*, Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 21, Nr.171, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [29] **Janßen, D.:** *Verfahren zur Bestimmung des senkrechten und den hemisphärischen Gesamtemissionsgrades von Gläsern unter Atmosphärenbedingungen im Temperaturbereich von 50° C bis 100° C*, Dissertation, TU Braunschweig, 1991.
- [30] **Jordan, E.C.; Balmain, K.G.:** *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, Prentice-Hall, Inc., London, 1968.
- [31] **Kabelac, S.:** *Thermodynamik der Strahlung*, Cuvillier Verlag, Göttingen, 1999.
- [32] **Kirchhoff, R.:** *Bestimmung der spektralen Emissionsgrade feuerfester Baustoffe und keramischer Spezialerzeugnisse*, Cuvillier Verlag, Göttingen, 1999.
- [33] **Koirala, L.R.:** *FTIR-Spectroscopic Measurement of Directional Spectral Emissivities of Microstructured Surfaces*, Dissertation, Institut für Thermodynamik, Helmut-Schmidt-Universität, Hamburg, 2004.
- [34] **Labuhn, D.:** *Die Bedeutung der Strahlungsentropie zur thermodynamischen Bilanzierung der Solarenergiewandlung*, Shaker Verlag, Aachen, 2001.
- [35] **Lehner, G.:** *Elektromagnetische Feldtheorie*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

-
- [36] **Linka, St.:** *Untersuchung der Eigenschaften von Schlacken und Schmelzen in technischen Feuerungen*, Bochum, 2003.
- [37] **Lohrengel, J.:** *Temperatur- und Winkelabhängigkeit des Gesamtemissionsgrades schlechter Wärmeleiter im Temperaturbereich von -60°C bis 250°C* , Dissertation, RWTH Aachen, 1969.
- [38] **Siegel, R.; Howell, J.R.; Lohrengel, J.:** *Wärmeübertragung durch Strahlung Teil 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [39] **Siegel, R.; Howell, J.R.; Lohrengel, J.:** *Wärmeübertragung durch Strahlung Teil 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [40] **Siegel, R.; Howell, J.R.; Lohrengel, J.:** *Wärmeübertragung durch Strahlung Teil 3*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [41] **Lorenz, P.; Poterasu, V.; Mihalache, N.:** *Methode der Finiten Elemente und der Randelemente*, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1995.
- [42] **Maradudin, A.A.; Michel, T.; McGurn, A.R.; Mendez, E.R.:** *Enhanced Backscattering of Light from a Random Grating*, Annals of Physics, 203, S. 255-307, 1990.
- [43] **Mayr, M.; Thalsofer, U.:** *Numerische Lösungsverfahren in der Praxis*, Carl Hanser Verlag, München, 1993.
- [44] **NAG:** *NAG Fortran Library Introductory Guide*, NAG, Oxford, 1997.
- [45] **Oertel, H.:** *Entwicklung eines Meßsystems und Bestimmung spektraler Emissionsgrade von Metallen für die Berechnung der Strahlungswärmeübertragung und die Pyrometrie in wärmetechnischen Anlagen*, Dissertation, Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Technische Universität Clausthal, Clausthal, 1997.
- [46] **Ono, A.:** *A hemispherical mirror method for the measurement of directional spectral emissivities of diffuse opaque surfaces*, Proceedings of the 8th Symposium on Thermophysical Properties, Vol. 2, S. 133-137, New York, 1982.
- [47] **Palik, E.D.:** *Handbook of optical constants of solids*, Band 1-4, Academic Press, Boston, 1998.
- [48] **Profos, P.; Pfeifer, T.:** *Handbuch der industriellen Meßtechnik*, 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 1995.
- [49] **Psarouthakis, J.:** *Apparent thermal emissivity from surfaces with multiple v-shaped grooves*, AIAA Journal, Vol. 1, No. 8, S. 1879-1882, 1963.
- [50] **Rahmelow, K.:** *Fourier-Transformations-Infrarot-Spektroskopie*, Hochschul-Verlag, Freiburg, 1995.
- [51] **Rothe, H.:** *Vorlesungsskriptum Meßtechnik*, Helmut-Schmidt-Universität, Hamburg, 2001.

- [52] **Reiss, H.:** *Superisolationen*, VDI-Wärmeatlas, Abschnitt Kf, Heidelberg, 1997.
- [53] **Starp, P.:** *Konzeption und Entwurf einer Versuchsanlage zur Messung der optischen Eigenschaften technischer Oberflächen in Solarenergiewandlern*, Diplomarbeit, Institut für Thermodynamik, Universität Hannover, 1995.
- [54] **Smetana, W.; Reicher, R.:** *A new Measuring Method to Determine Material Spectral Emissivity*, Meas. Sci. Technol., Vol. 9, S. 797-802, 1998.
- [55] **Stoecker, H.:** *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1999.
- [56] **Stratton, J.A.:** *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [57] **Tai, C.-T.:** *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, 2. Auflage, IEEE Press, New York, 1994.
- [58] **Touloukian, Y.S.; Dewitt, D.P.:** *Thermophysical Properties of Matter: The TPRC Data Series; A Comprehensive Compilation of Data, Vol. 7: Thermal Radiative Properties: Metallic Elements and Alloys*, IFI/Plenum, New York, 1974.
- [59] **Nieto-Vesperinas, M.; Soto Crespo, J.M.:** *Electromagnetic scattering from very rough random surfaces and deep reflection gratings*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 6, S.367-384, 1989.
- [60] **Nieto-Vesperinas, M.; Sánchez-Gill, J.A.:** *Light scattering from random dielectric surfaces*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 8, S.1270-1286, 1991.
- [61] **Nieto-Vesperinas, M.:** *Scattering and Diffraction in Physical Optics*, Jon Wiley & Sons, New York, 1991.
- [62] **Wolf, E.:** *A Generalized Extinction Theorem and Its Role in Scattering Theory*, Coherence and Quantum Optics, S. 339-357, Plenum, 1991.

Lebenslauf

Name: Jens Gengenbach
Geburtsdatum: 22. November 1978
Geburtsort: Norden
Familienstand: Verheiratet
Nationalität: Deutsch

Schulausbildung:

1985-89 Grundschole Dornum
1989-91 Orientierungsstufe Westerholt
1991-98 Gymnasium KGS Wittmund
07.98 Abitur

Studium:

10.99-04.03 Maschinenbau an der Universität der Bundeswehr Hamburg,
Vertiefungsrichtung: Energie- und Verfahrenstechnik,
Abschluss: Dipl.-Ing.

Berufliche Tätigkeiten:

07.98-09.99 Offiziersausbildung an der Offizierschule
der Luftwaffe in Fürstenfeldbruck
04.03-06.04 Stellv. Leiter Technische Einsatzführung und DV-Offizier
in der 2./LogBtl 162 in Husum
07.04-06.07 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Helmut-Schmidt Universität,
Universität der Bundeswehr, Hamburg, Institut für Thermodynamik
Institutsleiter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Stephan Kabelac

Hamburg, Juli 2007

