

Diskussionspapierreihe
Working Paper Series



HELMUT SCHMIDT
UNIVERSITÄT

Universität der Bundeswehr Hamburg

LINEARE DYNAMISCHE
KONFLIKTMODELLE:
EIN SYSTEMATISCHER ÜBERBLICK

KLAUS BECKMANN, SUSAN GATTKE,
ANJA LECHNER UND LENNART REIMER

Nr./ No. 163
FEBRUAR 2016

Department of Economics
Fächergruppe Volkswirtschaftslehre

Autoren / Authors

Klaus Beckmann

Helmut-Schmidt-University Hamburg
Chair for Public Economics
klaus.beckmann@hsu-hh.de

Susan Gattke

Helmut-Schmidt-University Hamburg
Chair for Public Economics
gattke@hsu-hh.de

Anja Lechner

Helmut-Schmidt-University Hamburg
Chair for Public Economics
lechnera@hsu-hh.de

Lennart Reimer

Helmut-Schmidt-University Hamburg
Chair for Public Economics
lennart.reimer@hsu-hh.de

Redaktion / Editors

Helmut Schmidt Universität Hamburg / Helmut Schmidt University Hamburg
Fächergruppe Volkswirtschaftslehre / Department of Economics

Eine elektronische Version des Diskussionspapiers ist auf folgender Internetseite zu finden / An electronic version of the paper may be downloaded from the homepage:

<http://fgvwl.hsu-hh.de/wp-vwl>

Koordinator / Coordinator

Ralf Dewenter
wp-vwl@hsu-hh.de

Lineare dynamische Konfliktmodelle: ein systematischer Überblick

Klaus Beckmann
Susan Gattke
Anja Lechner
Lennart Reimer

Zusammenfassung / Abstract

Gegenstand dieses Beitrags ist ein allgemeines lineares dynamisches Konfliktmodell, welches viele bekannte Modelle als Spezialfälle enthält. Die stationären Punkte und die möglichen dynamischen Muster (asymptotische Stabilität) in diesem Modell werden allgemein charakterisiert und die Spezialfälle tabellarisch aufbereitet. Mögliche Erweiterungen des Modells und ein Ansatz zu seiner empirischen Illustration werden kurz diskutiert.

Schlagworte / Keywords: Konfliktdynamiken, Differentialgleichungen, Lotka-Volterra, Richardson, Lanchester

1. Einleitung

Fragt man eine Ökonomin nach einem geeigneten konzeptionellen Rahmen für die Analyse von Konfliktodynamiken, so stehen nichtkooperative Spiele in extensiver Form mit asymmetrischer Information und Differentialspiele ganz oben auf der Liste. Solche Modelle lassen sich indes oft nur schwer skalieren, und es existieren mitunter keine allgemeinen Theoreme zur Charakterisierung von Lösungen (Beckmann & Reimer, 2014).

In der anwendungsorientierten Forschung finden sich dagegen oft einfachere Modelle, in denen auf eine explizite Optimierung durch die abgebildeten Agenten verzichtet wird – obwohl bei der Simulation auf der Grundlage solcher Modelle die Optimierung von Teilbereichen durchaus eine Rolle spielen kann. Solche Modelle bilden dann auch das Herzstück von Simulationen, wie sie bei der *Operational analysis* im Rahmen militärischer Planungsprozesse oder in der Ausbildung eingesetzt werden (Washburn & Kress, 2009).

Beispielsweise untersuchen Atkinson und Kress (2012) mit einfachen Gleichungen vom Lanchester-Typ Konflikte im mittleren Osten und kommen zu Ergebnissen, welche auch aus der Rückschau plausibel erscheinen. Francisco (2009) nutzt Zeitreihendaten über politischen Widerstand und Repression auf der Grundlage eines Lotka-Volterra-Ansatzes für eine eher induktive Studie von Konfliktodynamiken.

In diesem Papier greifen wir diese einfacheren (nicht-optimierenden) Ansätze auf und betten sie in ein allgemeineres Modell ein. Ziel ist es erstens, die gängigen Erkenntnisse zu systematisieren, zweitens aber auch, Grenzen für diese Modelle aufzuzeigen. Damit wird insgesamt sowohl ein didaktischer Zweck verfolgt als auch die Fortentwicklung der Theorie beabsichtigt.

Abschnitt 2 beschreibt und analysiert das allgemeine lineare Modell eines Zwei-Parteien-Konflikts. In Abschnitt 3 geben wir eine tabellarische Übersicht über dessen Spezialfälle in der Literatur und kommentieren mögliche Erweiterungen. Abschnitt 4 enthält eine exemplarische empirische Anwendung. In Abschnitt 5 fassen wir die Ergebnisse kurz zusammen.

2. Struktur des linearen Modells

Die uns interessierende Klasse von Modellen ist dadurch charakterisiert, dass je eine Zustandsvariable pro Partei mit den Zuständen der anderen über partielle Differentialgleichungen verknüpft wird, wobei man auf eine Optimierung der so beschriebenen Pfade für die Ableitung der dynamischen Grundmuster (zunächst) verzichtet. Beispiele für solche Zustandsvariablen können die verfügbaren Kräfte einer Partei in einem Gefecht, die Werbeanstrengungen einer Marke, die Zahl der Individuen einer Spezies oder die Aggressionsebenen von gesellschaftlichen Gruppen sein.

2.1. Bausteine

Betrachtet man die Literatur, so fällt auf, dass eine große Zahl von Modellen diskutiert und geschätzt wird, die man letztlich als verschieden behandelt. Dabei geht unter, dass sich diese Modelle aus insgesamt drei simplen Elementen zusammensetzen und als Spezialfälle eines allgemeineren Ansatzes beschreiben lassen. Im folgenden werden zunächst die drei hauptsächlichen Bausteine dieser Modelle eingeführt.

(a) Exponentielles Wachstum: Das erste typische Element in linearen Modellen dynamischen Konflikts ist das exponentielle Wachstum einer Zustandsvariable x mit der Rate n_x , also

$$\dot{x} = n_x x \quad (1)$$

Eine gängige Variante dieses Elements besteht in der *Anpassung* an ein „natürliches“ oder „gewünschtes“ Niveau der Zustandsvariablen \hat{x} , so dass

$$\dot{x} = n_x (\hat{x} - x) \quad (2)$$

Da der erste Term von Gleichung (2) bei einer Ableitung nach x verschwindet, macht es für die dynamischen Eigenschaften des Systems keinen Unterschied, welche der beiden Varianten man zugrunde legt (mit entsprechendem Vorzeichen von n_x).

(b) Direkter Effekt auf die gegnerische Zustandsvariable: Das zweite Element ist der Effekt der Zustandsvariable y auf x . Diese Reaktion wird durch den Reaktionskoeffizienten r_{xy} gemessen, also

$$\dot{x} = r_{xy} y \quad (3)$$

Ein solcher Effekt entsteht zum Beispiel bei Duellsituationen zwischen den Waffensystemen einer Seite, gemessen durch y , und den durch x gemessenen Waffensystemen der betrachteten Seite. Dabei wird unterstellt, dass x der Gegenseite stets ausreichend Ziele bietet (Washburn & Kress, 2009). Er entsteht auch, wenn eine Seite auf die Vergrößerung der gegnerischen Streitkräfte mit eigener Aufrüstung reagiert.

(c) Interaktionseffekt: Schließlich enthalten viele dynamische Modelle von Konflikten einen Interaktionseffekt zwischen den Zustandsvariablen. Ein Beispiel dafür bildet eine Gefechts-situation, in der y artilleristische Waffensysteme auf einer Seite x Systeme der anderen Seite bekämpfen, welche sich in einer gegebenen Fläche verteilen. Dergleichen wird durch die nachfolgende Gleichung beschrieben:

$$\dot{x} = \xi_{xy} xy \quad (4)$$

2.2. Das allgemeine Modell für den Zwei-Parteien-Fall

(a) Beschreibung: Wir wollen uns zunächst zur Vereinfachung auf den Fall zweier Parteien x und y beschränken. In diesem Fall können wir die oben aufgeführten Effekte unmittelbar zu einem System von zwei partiellen Differentialgleichungen zusammenfügen:

$$\dot{x} = n_x(\hat{x} - x) + r_{xy}y + \xi_{xy}xy \quad (5)$$

$$\dot{y} = n_y(\hat{y} - y) + r_{yx}x + \xi_{yx}xy \quad (6)$$

Eine geschlossene Lösung des o.g. Systems – also in Form von Funktionen $x(t)$, $y(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit und von den Ausgangswerten – ist generell von geringerem Interesse als eine graphische Analyse durch Phasendiagramme und eine Untersuchung seiner Stabilitätseigenschaften.

(b) Kandidat für ein stationäres Gleichgewicht: Betrachten wir zunächst die Kandidaten für stationäre Zustände des Systems, also für (mindestens) Sattelpunkte, aus welchen das System durch endogene Kräfte nicht mehr herausgetrieben wird. Diese erhalten wir durch die Lösung von (5) und (6) für $\dot{x} = \dot{y} = 0$ als

$$x^* = \pm \frac{1}{2(r_{yx}\xi_{xy} + n_x\xi_{yx})} (n_x n_y - r_{xy}r_{yx} + n_x \hat{x} \xi_{yx} - n_y \xi_{xy} \hat{y} + A)$$

$$y^* = \pm \frac{1}{2(r_{xy}\xi_{yx} + n_y\xi_{xy})} (n_x n_y - r_{xy}r_{yx} - n_x \hat{x} \xi_{yx} + n_y \xi_{xy} \hat{y} + A)$$

mit

$$A = \sqrt{(-4n_y(r_{yx}\xi_{xy} + n_x\xi_{yx})(n_x\hat{x} + r_{xy}\hat{y}) + (r_{xy}r_{yx} - n_x(n_y + \hat{x}\xi_{yx}) + n_y\xi_{xy}\hat{y}))^2}$$

Dieser recht umfängliche Ausdruck kann in den verschiedenen Modellvarianten aus der Literatur, welche wir im nachfolgenden Abschnitt diskutieren, erheblich einfacher ausfallen. Führen beispielsweise die Wachstumsprozesse nicht asymptotisch zu einem bestimmten „Normalwert“ – $\hat{x} = \hat{y} = 0$ –, so vereinfacht sich A zu $A = \sqrt{r_{xy}r_{yx} - n_y n_x}$.

(c) Stabilitätseigenschaften: Ob die unter (b) gefundenen stationären Punkte lokal asymptotisch stabil sind, hängt von den Einheitswerten der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} -n_x + \xi_{xy}y & r_{xy} + \xi_{xy}x \\ r_{yx} + \xi_{yx}y & -n_y + \xi_{yx}x \end{pmatrix} \quad (7)$$

ab.¹ Diese finden wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms zweiten Grades

$$\lambda^2 + \lambda(n_x + n_y - \xi_{yx}x - \xi_{xy}y) + n_x n_y - r_{xy}r_{yx} - r_{yx}\xi_{xy}x - r_{xy}\xi_{yx}y - n_x \xi_{yx}x - n_y \xi_{xy}y = 0 \quad (8)$$

1. Lesern und Leserinnen, welche sich hinsichtlich der verwendeten mathematischen Verfahren nicht sicher fühlen, sei das Lehrbuch von Sydsæter, Hammond, Seierstad, and Strøm (2008) empfohlen.

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\xi_{xy}y^* + \xi_{yx}x^* - n_x - n_y \pm \sqrt{B}) \quad (9)$$

wobei

$$B = (n_x + n_y - \xi_{yx}x^* - \xi_{xy}y^*)^2 + 4(r_{xy}r_{yx} + r_{yx}\xi_{xy}x^* + r_{xy}\xi_{yx}y^* + n_x\xi_{yx}x^* + n_y\xi_{xy}y^* - n_xn_y)$$

ist. Diese stellen die Einheitswerte von (7) dar. Abhängig von den Parametern und ggf. den Zustandsvariablen sind dann folgende Konstellationen möglich:

1. Falls $B > 0$, sind beide Eigenwerte realwertig und verschieden. In diesem Fall
 - a. liegt ein stabiler Knoten vor, wenn beide Eigenwerte negativ sind,
 - b. liegt ein instabiler Knoten vor, wenn beide Eigenwerte positiv sind, und
 - c. liegt ein Sattelpunkt (aus einigen Regionen führt die Entwicklung in den Punkt (x^*, y^*) hinein, in anderen aus ihm heraus) vor, wenn sich die Vorzeichen der Eigenwerte unterscheiden.
2. Falls $B < 0$, haben wir Eigenwerte mit imaginären Teilen und damit eine spiralförmige Bewegung des Systems. Diese ist
 - a. asymptotisch stabil (führt in (x^*, y^*) hinein), wenn die Eigenwerte ausschließlich negative Realteile aufweisen, und
 - b. sie ist instabil, wenn die Eigenwerte ausschließlich strikt positive Realteile aufweisen.
 - c. Eine rein kreisförmige Bewegung („limit cycle“) kommt zustande, wenn die Realteile beider Eigenwerte Null sind.
3. Ist schließlich $B = 0$, so kommt es zu einem degenerierten Knoten.

In den verschiedenen Modellvarianten aus der Literatur, denen wir uns nun zuwenden, kommen sämtliche dieser Möglichkeiten zum Tragen – wenngleich nicht alle in jeder Variante.

3. Varianten in der Literatur und mögliche Erweiterungen

3.1. Ein tabellarischer Literaturüberblick

Ein wesentlicher Vorteil unserer Entwicklung eines Modellrahmens ist, dass sich die bekannten Ansätze aus der einschlägigen Literatur darin einordnen, als Spezialfälle darstellen und vergleichen lassen. Die formalen Ergebnisse aus dem Unterabschnitt 2.2.

können unmittelbar auf die verschiedenen Varianten angewendet werden und lassen sich in den meisten Fällen unmittelbar vereinfachen. Die folgende Tabelle stellt die Varianten dar:

Tab. 1: Modellvarianten aus der Literatur

\hat{x}, \hat{y}	n_x	n_y	r_{xy}	r_{yx}	ξ_{xy}	ξ_{yx}	Bezeichnung / Quelle
= 0	> 0	< 0	= 0	= 0	< 0	> 0	Lotka-Volterra-Modell (Volterra, 1931; Goodwin, 1967)
= 0	= 0	= 0	> 0	> 0	= 0	= 0	Lanchester's Square Law (Lanchester, 1916)
= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	> 0	> 0	Lanchester's Linear Law (Lanchester, 1956; Washburn & Kress, 2009)
> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	= 0	= 0	Richardson-Gleichungen (Richardson, 1919; Richardson, 1960; Boulding, 1962)
= 0	> 0	> 0	= 0	= 0	< 0	< 0	Modell der Spezies im Wettbewerb (Murray, 1993; Francisco, 2009)

3.2. Erweiterungen, insbesondere auf drei und mehr Akteure

In diesen Modellen wird nicht zugelassen, dass die Veränderung einer Zustandsvariablen (etwa \dot{x}) einen zeitgleichen Einfluss auf die Veränderung der anderen (\dot{y}) haben kann. Gerade wenn man diese Variablen als Aggressionsniveaus in einem Konflikt interpretiert (Boulding, 1962), erscheint es plausibel, dass die laufende Eskalation – möglicherweise um eine Periode gelagt – einen vom bestehenden Aggressionsniveau unabhängigen Einfluss haben kann. Dadurch können sich die Stabilitätseigenschaften des Modells ändern (Beckmann, Gattke, & Reimer, 2015b).

Als ein gewichtigerer Einwand erscheint freilich, dass unser Modellrahmen auf *dyadische* Interaktionen zugeschnitten ist, also auf Konflikte zwischen zwei Parteien. Während diese Art Modelle in der Konfliktökonomik noch dominiert,² werden in der politikwissenschaftlichen Literatur zunehmend *Triaden* untersucht. Dies ermöglicht die Abbildung zusätzlicher Interaktionseffekte wie der dämpfenden – oder auch nicht (Goldstein & Pevehouse, 1999) – Einwirkung internationaler Organisationen und / oder von Allianzen (Beckmann, Gattke, Lechner, & Reimer, 2015a). Einfache Erweiterungen bestimmter Spezifikationen des Modellrahmens auf drei oder mehr Akteure sind in der Literatur seit langem bekannt (Richardson, 1960). Die Schwierigkeit liegt darin, dass sich

2. Siehe dazu etwa die Beiträge in den aktuellen Handbüchern (Garfinkel und Skaperdas 2012; Hartley und Sandler 2007).

weitere *Arten* von Interaktionen nur durch eine erhebliche Erhöhung der Dimensionalität des Modells abbilden lassen (Beckmann et al., 2015a). Für solche erweiterten Modelle liefert die mathematische Literatur allerdings ab der dritten Dimension keine „Kochbücher“ im Sinne des Unterabschnitts 2.2. zur Bestimmung von Eigenwerten und Stabilitätseigenschaften mehr, und auch die gängige Technik der Phasendiagramme ist nicht mehr anwendbar.

4. Strategie zur empirischen Schätzung und Kritik

In vielen Anwendungen lassen sich die Variablen im Gleichungssystem (5) und (6) eindeutig identifizieren, und der Stand der ökonometrischen Forschung bietet mittlerweile erprobte Verfahren für die Schätzung von Mehrgleichungsmodellen auch unter Verwendung von Zeitreihen.

Das Buch von Francisco (2009) stellt ein gutes Beispiel für die in der angewandten politikwissenschaftlichen Forschung übliche Herangehensweise dar: Francisco (2009) nutzt Zeitreihen über das Auftreten von Demonstranten (i.w.S.) und von Polizei in verschiedenen Ländern. Die Inspiration für die Modellierung stammt aus der ökologischen Literatur, und auch für die empirische Seite werden folgerichtig die dort üblichen Ansätze (Strukturgleichungsmodelle mit der Schätzmethode *Seemingly unrelated regression*) gewählt. Auf Probleme der Heteroskedizität verwendeter Zeitreihendaten wird kurz hingewiesen. Ansonsten bleibt die Herangehensweise *induktiv*: Aus den (signifikanten) Schätzungen für die Parameter wird abgeleitet, welche dynamische Struktur greift. Dabei werden ggf. Insignifikanzen so gedeutet, dass der entsprechende Parameter keine Bedeutung. Im Ergebnis schält sich so ein quantifiziertes Konfliktmodell als Ergebnis der empirischen Analyse heraus.

Wir illustrieren diese Strategie mit Hilfe eines Datensatzes aus der GDELT-Datenbank für den Konflikt zwischen Äthiopien und Eritreia von 1995 bis 2003 (einschließlich einer Kriegsphase von 1998 bis 2001). Dieser Konflikt wurde gewählt, weil er einer rein dyadischen Interaktion recht nahe kommen dürfte. Wir nutzen Zeitreihen von Aktionen zwischen den beiden Konfliktparteien auf Tagesbasis. Dabei operationalisieren wir $\dot{x}(\dot{y})$ als die Summe der Goldstein-Scores (Goldstein, 1992), mit denen die Aktionen Äthiopiens (Eritreias) an dem jeweiligen Tag bewertet wurden. x und y ermitteln wir durch Kumulation, so dass wir implizit $\hat{x} = \hat{y} = 0$ setzen.

Die Schätzung bleibt eine Illustration, weil insbesondere Probleme der Nichtstationarität von x und y nicht korrigiert wurden – es ist uns auch nicht klar, wie dies etwa durch das übliche Mittel der Differenzierung geschehen soll, ohne den Charakter des Modells zu verändern – und weil Tests auf Granger-Kausalität ergeben, dass die kumulierten Variablen die tägliche (De-) Eskalation nicht granger-verursachen (Beckmann et al., 2015b). Wir

verzichten hier auch auf eine Unterteilung der Zeitreihe in die Phasen vor, während und nach dem bewaffneten Konflikt.

Im Unterschied zu Francisco (2009) beschränken wir uns aber nicht von vornherein auf zwei Spezifikationen des allgemeinen dyadischen Modells – wobei wir mögliche Wechselwirkungen zwischen \dot{x} und \dot{y} wie schon im theoretischen Teil ignorieren –, und wir schätzen mit einem neuen Datensatz.

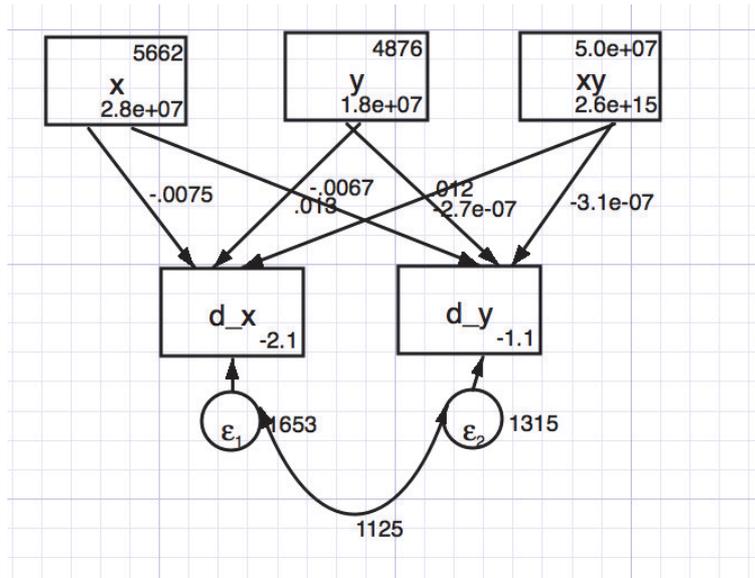


Abb. 1: Geschätztes Strukturgleichungsmodell (SUR) im Model builder von STATA

Die Schätzergebnisse einer *Seemingly unrelated regression* (SUR) finden sich in der nachfolgenden Tabelle 2. Selbst wenn man die Konfidenzniveaus wegen der oben genannten Probleme nicht allzu ernst nimmt, erweisen sich die Vorzeichen der Parameter konsistent und mit dem theoretischen Modell durchaus vereinbar.

Tab. 2: SUR-Schätzung des Gesamtmodells für den Äthiopien-Eritrea-Konflikt

	\dot{x}	\dot{y}
x	-0,00755 *** (-9,88)	0,01165 *** (12,40)
y	0,01259 *** (11,95)	-0,00671 *** (-9,85)
xy	$-2,72e-07$ *** (-5,16)	$-3,14e-07$ *** (-6,68)

Handelte es sich dabei um vertretbare Schätzungen der wirklichen Parameter für den Konflikt zwischen Äthiopien und Eritreia, so könnte man auf dieser Grundlage dem Vorgehen von Francisco (2009) folgend zweierlei schließen:

- Adäquat für die Modellierung *dieses* Konflikts ist das *allgemeine* Modell und nicht eine der Varianten aus der in der Tabelle 1 aufbereiteten Literatur. Ergänzend wäre noch zu prüfen, ob man nicht auch Wechselwirkungen zwischen \dot{x} und \dot{y} aufnehmen müsste.
- Mit den geschätzten Parametern kann man auch zu Aussagen über die Konfliktodynamiken für dieses Beispiel kommen.

Die Koeffizienten aus der Tabelle 2 sind konsistent mit zwei stationären Punkten. Offensichtlich zählt aufgrund unserer impliziten Annahme, dass $\hat{x} = \hat{y} = 0$ ist, die Lösung $x^* = y^* = 0$ dazu; daneben lässt sich mit den Schätzwerten auch ein asymmetrischer stationärer Punkt mit $x^* = 35478,0$ und $y^* = -91109,0$ vereinbaren. Beim erstgenannten Fixpunkt sind beide Eigenwerte imaginär, und die Vorzeichen ihrer Realteile unterscheiden sich. Der zweite ist dagegen durch zwei positive Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen gekennzeichnet, stellt also einen Sattelpunkt dar. Stabilität wäre aufgrund dieser Ergebnisse nicht zu erwarten.

5. Zusammenfassung und Bewertung

Gegenstand dieses Beitrags ist ein allgemeines lineares dynamisches Konfliktmodell, welches die bekannten Lanchester-Gleichungen, die Robertson-Gleichungen und das Lotka-Volterra-Modell als Spezialfälle enthält. Die stationären Punkte und die möglichen dynamischen Muster (asymptotische Stabilität) in diesem Modell wurden allgemein charakterisiert; die in den Spezialfällen jeweils möglichen dynamischen Konfigurationen hängen von den konkreten Parameterwerten ab. Dazu fassen wir die verschiedenen Modellvarianten tabellarisch zusammen.

Das Zwei-Akteurs-Modell erweist sich bereits als ein vielseitiger analytischer Rahmen, in dem zahlreiche dynamische Muster abgebildet werden können. Seine Varianten sind auch empirisch erfolgreich angewendet worden. Wir illustrieren eine induktive Anwendung dieser Art und weisen auf Probleme solcher Analysen hin, die insbesondere in der Notwendigkeit von *ad hoc*-Entscheidungen über die Abgrenzung von Konflikten und über „Nullpunkte“ von Zustandsvariablen sowie in einer Überschätzung der Signifikanzniveaus bestehen. Erweiterungen unseres Modells auf n Akteure sind – für einzelne seiner Varianten – bereits gut bekannt. Will man indes über eine bloße Erhöhung der Zahl dyadischer Interaktionseffekte hinausgehen, vervielfacht sich die Dimensionalität des Modells über das hinaus, was

mit analytischen oder graphischen Techniken zu bewältigen ist. Damit wird die Konfliktforschung auf Simulationsstudien verwiesen.

Literaturverzeichnis

- Atkinson, M. P., & Moshe, K. (2012). When do armed revolts succeed: lessons from Lanchester theory. *Journal of the Operational Research Society*, 63(10), 1363-1373.
- Beckmann, K. B., & Reimer, L. (2014). Dynamics of military conflict: an economics perspective. *Review of Economics*, 65, 265-285.
- Beckmann, K. B., Gattke, S., Lechner, A., & Reimer, L. (2015a). A critique of the Richardson equations.
- Beckmann, K. B., Gattke, S., & Reimer, L. (2015b). The Boulding-Richardson model revisited. 159).
- Boulding, K. E. (1962). *Conflict and Defense: A General Theory*. New York: Harper and Brothers.
- Francisco, R. A. (2009). *Dynamics of Conflict*. Springer.
- Garfinkel, Michelle R. und Georgios Skaperdas (2012). *The Oxford Handbook of the Economics of Peace and Conflict*. Oxford: Oxford UP.
- Goldstein, J. S. (1992). A conflict-cooperation scale for WEIS events data. *The Journal of Conflict Resolution*, 36(2), 369-385.
- Goldstein, J. S., & Pevehouse, J. C. (1999). Serbian compliance or defiance in Kosovo? Statistical Analysis and real-time predictions. *The Journal of Conflict Resolution*, 43(4), 538-546.
- Goodwin, R. M. (1967). A growth cycle. In C. H. Feinstein (Ed.), *Socialism, Capitalism and Economics Growth*. Cambridge University Press.
- Lanchester, F. W. (1916). *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*. New York: Appleton.
- Lanchester, F. W. (1956). Mathematics in warfare. In J. R. Newman (Ed.), *The World of Mathematics* (pp. 2138-2157). New York: Simon and Schuster.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology*. New York: Springer.
- Richardson, L. F. (1919). *The Mathematical Psychology of War*. Oxford: Hunt.
- Richardson, L. F. (1960). *Arms and Insecurity*. Quadrangle Books.
- Sandler, Todd und Keith Harley (2007). *Handbook of Defense Economics* (2). Elsevier.
- Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A., & Strøm, A. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis* (2 ed.). Harlow et al.: Prentice Hall.
- Volterra, V. (1931). *Leçons sur la théorie Mathématique de la lutte pour la vie*. Paris: Gauthier-Villars.
- Washburn, A., & Kress, M. (2009). *Combat Modeling*. Heidelberg: Springer.

2016

- 162 Beckmann, Klaus; Gattke, Susan; Lechner, Anja; Reimer, Lennart: A critique of the Richardson equations, January 2016

2015

- 161 Dewenter, Ralf; Schwalbe, Ulrich: Preisgarantien im Kraftstoffmarkt, Oktober 2015
- 160 Afflatet, Nicolas: Fiscal Policy in a Debt Crisis - A Model, June 2015
- 159 Beckmann, Klaus; Gattke, Susan; Reimer, Lennart: The Boulding-Richardson Model Revisited, June 2015
- 158 Jahn, Vera: The Importance of Mittelstand Firms for Regional Apprenticeship Activity - Lessons for Policy, April 2015
- 157 Im Winkel, Niklas: Rechts? Links? Liberal? Egal? Gründe für die Entstehung verzerrter Medieninhalte und Methoden zur Messung des Bias, February 2015
- 156 Afflatet, Nicolas: Public Debt and Borrowing. Are Governments Disciplined by Financial Markets?, January 2015

2014

- 155 Berlemann, Michael; Christmann, Robin: Determinants of In-Court Settlements. Empirical Evidence from a German Trial Court, December 2014
- 154 Berlemann, Michael; Christmann, Robin: Do Judges React to the Probability of Appellate Review? Empirical Evidence from Trial Court Procedures, December 2014
- 153 Bennöhr, Lars; Oestmann, Marco: Determinants of house price dynamics. What can we learn from search engine data?, October 2014
- 152 Dewenter, Ralf; Giessing, Leonie: The Effects of Elite Sports on Later Job Success, October 2014
- 151 Dewenter, Ralf; Rösch, Jürgen; Terschüren, Anna: Abgrenzung zweiseitiger Märkte am Beispiel von Internetsuchmaschinen, October 2014
- 150 Berlemann, Michael; Jahn, Vera: Governance, firm size and innovative capacity: regional empirical evidence for Germany, August 2014
- 149 Dewenter, Ralf; Rösch, Jürgen: Net neutrality and the incentives (not) to exclude competitors, July 2014
- 148 Kundt, Thorben: Applying “Benford’s” law to the Crosswise Model: Findings from an online survey on tax evasion, July 2014
- 147 Beckmann, Klaus; Reimer, Lennart: Dynamiken in asymmetrischen Konflikten: eine Simulationsstudie, July 2014
- 146 Herzer, Dierk: Unions and income inequality: a heterogeneous panel cointegration and causality analysis, July 2014
- 145 Beckmann, Klaus; Franz, Nele; Schneider, Andrea: Intensive Labour Supply: a Menu Choice Revealed Preference Approach for German Females and Males, June 2014
- 144 Beckmann, Klaus; Franz, Nele; Schneider, Andrea: On optimal tax differences between heterogeneous groups, May 2014
- 143 Berlemann, Michael; Enkelmann, Sören: Institutions, experiences and inflation aversion, May 2014
- 142 Beckmann, Klaus; Gattke, Susan: Tax evasion and cognitive dissonance, April 2014
- 141 Herzer, Dierk; Nunnenkamp, Peter: Income inequality and health – evidence from developed and developing countries, April 2014
- 140 Dewenter, Ralf; Heimeshoff, Ulrich: Do Expert Reviews Really Drive Demand? Evidence from a German Car Magazine, March 2014
- 139 Dewenter, Ralf; Heimeshoff, Ulrich: Media Bias and Advertising: Evidence from a German Car Magazine, March 2014
- 138 Beckmann, Klaus; Reimer, Lennart: Dynamics of military conflict from an economics perspective, February 2014

