Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg

Vorkurs Mathematik

Vorgehensweise zum Lösen von Textaufgaben:

1. Den Aufgabentext zweimal langsam durchlesen
2. Zwei Listen aufstellen für die gegebenen und die gesuchten Größen; Falls nicht vorgegeben: Geeignete (standardisierte) Variablennamen wählen
3. Überlegen, welche Zusammenhänge/Gleichungen (Definitionen, Gesetze, etc.) zwischen den Größen gelten
4. Die Zusammenhänge als Gleichungen notieren, bei Bedarf zusätzliche Variable/Größen definieren
5. Mit Hilfe geeigneter mathematischer Umformungen aus den gegebenen Größen die gesuchten bestimmen

Zu beachten:

1. Zur Bestimmung von n unbekannten Größen werden ebenso viele unabhängige Gleichungen benötigt.
2. Mit Variablen, nicht mit Zahlenwerten rechnen (Größengleichungen)
3. Zahlenwerte und Einheiten für gegebene Größen in die formelmäßige Endlösung einsetzen, um die Zahlenwerte und Einheiten der gesuchten Größen zu erhalten
4. Was kann ohne detaillierte Rechnung gesagt werden ?
   (z.B. über Größenordnung, Vorzeichen, Eindeutigkeit des Ergebnisses)
5. Ergebnisse auf Plausibilität prüfen
6. Mit sinnvoller Genauigkeit rechnen

Vorkurs Mathematik - Textaufgaben

1. Ein ,,Rechentrick” zum quadrieren einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer 5 lautet so:
   Nimm die Zehnerziffer der Zahl und vergrößere sie um 1, multipliziere das Ergebnis mit der Zehnerziffer selbst. Hängt man an die Zahl, die sich dabei ergibt, die Ziffernfolge 25 an, hat man schon die gesuchte Quadratzahl.

   (a) Berechne nachvollziehbar mit dieser Methode das Quadrat der Zahl 25.

   (b) Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer x und der Einerziffer 5 lässt sich schreiben als $10x + 5$.
   Berechne $(10x + 5)^2$, forme das Ergebnis geeignet um und begründe dadurch den obigen ,,Rechentrick”.

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

2. In einem Trapez ist eine Grundlinie 1,5mal, die andere 2,5mal so lang wie die Höhe. Verkürzt man beide Grundlinien um 3 cm und verlängert die Höhe um 3 cm, so nimmt der Flächeninhalt um 15 cm^2 zu. Berechne die Längen von Grundlinien und Höhe!

3. Bei alkoholischen Getränken ist es üblich, den Anteil reinen Ethanols am Gesamtvolumen des Weines in Prozenten anzugeben. Ein Hobbywinzer stellt mit einer Präzisionswaage fest, dass 1 Liter seines trockenen Kirschweins eine Masse von 973,125 g hat. Wie viel Prozent Alkohol enthält dieser Wein?

   Man kann davon ausgehen, dass es sich bei Wein um eine Mischung aus Wasser und Ethanol handelt. Ein Liter Wasser wiegt 1,0 Kilogramm, ein Liter reines Ethanol wiegt 785 g. Die Anteile an Säure und Restzucker können vernachlässigt werden.

4. Um wie viel Uhr zwischen 8 und 9 Uhr decken sich großer und kleiner Zeiger einer Zeigeruhr?

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

5. Holz verliert beim Trocknen 42 % seiner Masse. Wie schwer war ein Stapel Holz im frischen Zustand, wenn er trocken 812 kg wiegt?

6. Bei einer Physikschulaufgabe gab es 10 % Einser, 20 % Zweier, 30 % Vierer, 15 % Fünfer und 5 % Sechser. Welcher Bruchteil der Schüler hatte einen Dreier? Wie groß war die Durchschnittsnote der Schulaufgabe? Wie viele Schüler haben an der Schulaufgabe teilgenommen, wenn die Prozentangaben exakt sind (nicht gerundet)?

7. Zocker-Tom besucht ein Spielcasino. Er setzt bei jedem Spiel den gleichen Anteil des Geldes, das er im Moment hat. Gewinnt er, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich den gleichen Betrag noch einmal. Verliert er, so hat er seinen Einsatz verspielt.

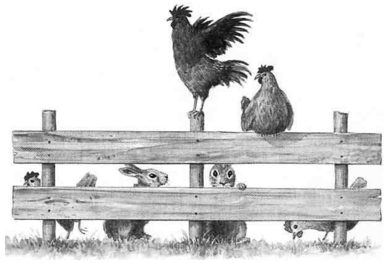
Als Zocker-Tom wieder aus dem Spielcasino kommt, hat er gleich viele Spiele gewonnen wie verloren. Über die Reihenfolge von Gewinn und Verlust ist nichts bekannt. Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

Quelle: 9. Landeswettbewerb Mathematik, 2006

8. Im Jahre 2006 beträgt die Mehrwertsteuer noch 16%, ab 01.01.2007 wird sie auf 19% angehoben. Um wieviel Prozent (auf Zehntel Prozent gerundet) steigt der Endpreis einer Ware durch diese Steuererhöhung?

9. **Aufgabe zur Anwendung**

   In einem Stall sind Hasen und Hennen und zwar 9 Tiere mit insgesamt 24 Füßen. Wie viele Hasen und Hennen sind es jeweils?

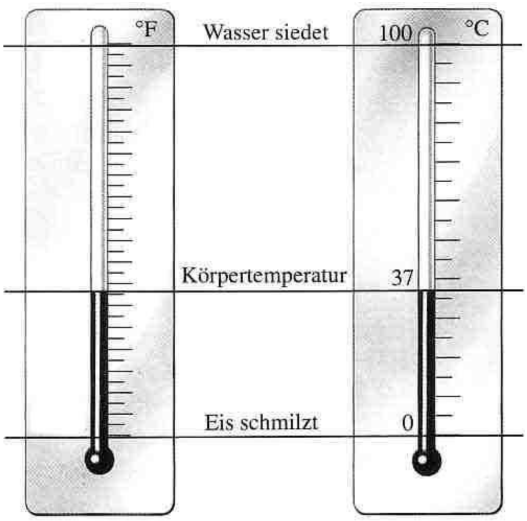


10. **Aufgabe zur Anwendung**

    Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 15, die Differenz der Ziffern ist 3. Welche beiden Zahlen können das sein?

11. **Aufgabe zur Anwendung**

    In den Vereinigten Staaten von Amerika wird die Temperatur in Grad Fahrenheit gemessen. Bei der Umrechnung von Celsius in Fahrenheit muss zu einem bestimmten Betrag jeweils ein Vielfaches der Celsius-Zahl addiert werden.
    Wie lautet die Umrechnungsformel, wenn $68°F = 20°C$ und $104°F = 40°C$ ist?
    Bei welcher Fahrenheittemperatur schmilzt also Eis? Trage die fehlenden Werte in die Grafik ein.



12. **Aufgabe zur Anwendung**

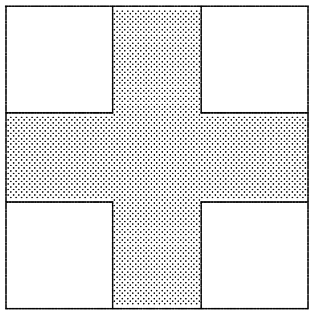
    Der Umfang eines Rechtecks beträgt 80 cm. Verlängert man zwei gegenüberliegende Seiten um je 8 cm und verkürzt zugleich die beiden anderen Seiten um je 5 cm, so verringert sich der Flächeninhalt des Rechtecks um 45 cm^2. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

13. **Aufgabe zur Anwendung**

    Jeder Zwerg isst 2, jeder Räuber isst 3 Hühner. Jeder Zwerg trinkt 3, jeder Räuber trinkt 5 Flaschen Wein. Zusammen essen sie 134 Hühner und trinken 221 Flaschen Wein.
    Wie viele Zwerge und wie viele Räuber nehmen an dem Mahl teil?

14. In einem Quader mit der Oberfläche 286 cm^2 ist die mittlere Kante 7 cm lang. Sie unterscheidet sich von der größten Kante ebensoviel wie von der kleinsten. Wie lang sind die Kanten dieses Quaders?

15. In ein weißes Quadrat der Seitenlänge $s = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$ ist ein schwarzes Kreuz symmetrisch eingezeichnet (vgl. Abbildung). Wie breit ist das Kreuz, wenn der Flächeninhalt des Kreuzes genauso groß ist wie der des Hintergrundes?



16. Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 5 kleiner als die Zehnerziffer. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Zehnerziffer, so ergibt sich die 56fache Quersumme. Wie heißt die Zahl?

17. Eine Sammellinse der Brennweite f cm entwirft von einem Körper, der g cm von ihr entfernt ist, ein Bild in der Entfernung b cm. Hierbei gilt die Gleichung $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.
    Wie weit ist der Körper von der Linse entfernt, wenn deren Brennweite 14,4 cm beträgt und b um 54 cm kleiner ist als g?

18. Um eine Strecke von 1800 m zurückzulegen, muß das Vorderrad eines Fahrzeugs, dessen Umfang um 1 m kleiner ist als der des Hinterrades, 150 Umdrehungen mehr machen als dieses. Wie oft dreht sich jedes der beiden Räder auf dieser Strecke?

19. Für einen Klassenausflug wurde ein Bus um 336 € gemietet. Da am Ausflugstag drei Schüler fehlen, muß der Fahrpreis pro Schüler um 2 € erhöht werden. Wie viele Schüler wollten ursprünglich an der Fahrt teilnehmen?

20. (a) Berechne mit dem Taschenrechner:

$$\sqrt{1,0000001 \cdot 0,9999999}$$

(b) Zeige, daß für zwei positive, verschiedene Zahlen p und q gilt

$$pq < \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$$

und begründe damit, daß ihr geometrisches Mittel strikt kleiner sein muß als ihr arithmetisches Mittel.

(c) Begründe, daß das Ergebnis der ersten Teilaufgabe nicht 1 sein kann.

21. **Die lineare Näherung**

Um die Wurzel einer nahe bei Eins gelegenen Zahl $1+x$ mit $|x| \ll 1$ zu berechnen, gibt es eine einfache Näherungsformel der Form

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x \quad \text{(I)}$$

(a) Quadriere (I) und vernachlässige den wegen $|x| \ll 1$ sicher sehr kleinen Summanden, der x^2 enthält! Vergleiche die linke und die rechte Gleichungsseite und bestimme dann a!

(b) Berechne mit der gefundenen Näherungsformel $\sqrt{1,002}$ und $\sqrt{0,99996}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen! Berechne die relativen Fehler der Näherungswerte!

(c) Die lineare Näherung liefert oft viel genauere Ergebnisse als die direkte Rechnung mit dem Taschenrechner. Als Beispiel sei folgender Ausdruck einmal mit dem Taschenrechner und einmal mit der linearen Näherung berechnet :

$$y = \left(1 - \sqrt{1 - 10^{-16}}\right) \cdot 10^{20}$$

Das auf 24 Dezimalstellen genaue Ergebnis lautet übrigens

$$y = 5000,000000000000125000000000\ .$$

(d) Eine Atomuhr wird mit der Geschwindigkeit v über eine Strecke s transportiert. Dabei mißt eine relativ zur Erde ruhende zweite Atomuhr die Transportzeit $t = \frac{s}{v}$. Die Relativitätstheorie Einsteins lehrt, daß die von der bewegten Uhr für den gleichen Vorgang gemessene Zeit durch

$$\boxed{t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2}}$$

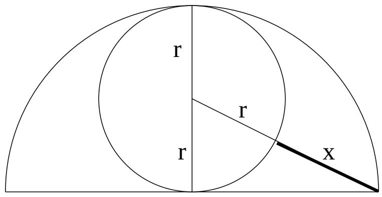
mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Lichtgeschwindigkeit) gegeben ist.
Berechne den Unterschied $\Delta t = t - t'$ der von beiden Uhren gemessenen Zeiten für $s = 300\,\mathrm{km}$ mit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und für $s = 40000\,\mathrm{km}$ mit $v = 432\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$!

22. Der Minutenzeiger einer Kirchturmuhr ist $0,95\,\mathrm{m}$ und der Stundenzeiger $0,45\,\mathrm{m}$ lang.

(a) Berechne den Weg, den die Spitze des Minutenzeigers in 3 Stunden zurücklegt.

(b) Berechne den Weg, den die Spitze des Stundenzeigers in der selben Zeit zurücklegt.

23. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



24. Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs und in gleichbleibender Höhe von 500 m mit einer Geschwindigkeit von 150 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau über einen Beobachter hinweg.

    Wie weit ist das Flugzeug nach 20 s vom Beobachter entfernt und unter welchem Winkel gegen die Horizontale beobachet er es dann?

25. Die Plattform eines Leuchtturms befindet sich in $23,8$ m Höhe. Mit einem Fernrohr sieht man ein vor Anker liegendes Schiff unter einem Winkel von $12,9°$.

    Wie weit ist das Schiff horizontal vom Fuß des Leuchtturms entfernt, wenn sich das Fernrohr $1,60$ m über der Plattform befindet?

26. Eine Firma erhält den Auftrag, Eisenkugeln zum Kugelstoßen herzustellen. Welchen Durchmesser müssen die Kugeln mit der Masse $m = 5\,\text{kg}$ haben?
    (Dichte von Eisen: $\varrho = 7{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)

27. Eine geschälte Orange von 4 cm Radius besteht aus 16 gleichen Schnitzen. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Schnitzes!

28. Eine Kugel mit dem Radius R hat das gleiche Volumen wie eine Halbkugel mit dem Radius r. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen von Halbkugel und Kugel.

29. Eine hohle Kugel mit 10 cm Außendurchmesser und 4 mm Wanddicke schwimmt in Wasser (Dichte $\varrho_W = 1{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) und taucht genau bis zur Hälfte ein. Berechnen Sie die Dichte ϱ_M des Materials, aus dem die Kugel besteht!

30. K_1 ist ein „Achtelschnitz“ einer Kugel mit Radius r (ein Schnitz wie von einer Orange, die aus acht gleichen Schnitzen besteht). K_2 ist ein Viertel einer **Halb**kugel mit Radius r.

    (a) Berechnen Sie die Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Körper.

    (b) Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen A_1 und A_2 der beiden Körper.

31. Schneidet eine Ebene eine Kugel vom Radius R im Abstand d $(0 \leqq d < R)$ vom Kugelmittelpunkt, so wird eine sogenannte **Kugelhaube** der Höhe $h = R - d$ abgeschnitten. Für den Flächeninhalt F der Kugelhaube (ohne Boden) gilt dabei die Formel

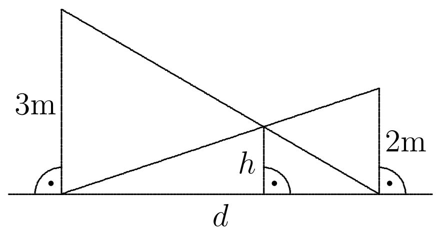
    $$F = 2\pi \cdot R \cdot h \qquad \text{(kein Nachweis!)}$$

    (a) Folgern Sie mit Hilfe dieser Beziehung die Formel zur Berechnung der Kugeloberfläche!

(b) In welcher Höhe H über dem Horizont überblickt man den n-ten Teil ($n \geqq 2$) der Erdoberfläche (Erdradius R)? Erstellen Sie eine Überlegungsskizze!

32. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

33. In einem Garten stehen im Abstand d zwei Pfähle mit den Höhen 3m und 2m. Jede Pfahlspitze ist mit dem Fuß des anderen Pfahls mit einer Schnur verbunden. In welcher Höhe h treffen sich die Schnüre? Wie hängt die Höhe h vom Abstand d der Pfähle ab?



Helmut-Schmidt-Universität

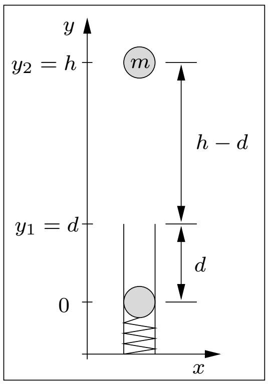
Vorkurs Mathematik - Physik-Aufgaben (2. Teil)

1. Der ICE–3 hat laut Hersteller eine maximale Anzugkraft von 300 kN und ein „Leergewicht" von 405 t. Der Zug hat 415 Sitzplätze. Wir unterstellen für einen Passagier eine Masse von 75 kg. Welche maximale Beschleunigung erreicht der vollbesetzte Zug?

2. Für die Reibungskraft zwischen Luft und einem Körper (*Luftwiderstand*) gilt folgender Zusammenhang: $R = C \cdot v^2$. C hängt von der Form des Körpers ab. Für einen Fallschirmspringer ($m = 80\,\mathrm{kg}$) ist $C = 0{,}20\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ bei geschlossenem und $C = 16\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ bei geöffnetem Schirm. Welche konstante Endgeschwindigkeit erreicht der Springer bei geschlossenem (geöffnetem) Schirm?

3. Die Feder einer Spielzeugkanone ($D = 5{,}4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) ist gerade dann entspannt, wenn die Kugel der Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ die Mündung ($y_1 = d = 20\,\mathrm{cm}$) erreicht.

   Welche maximale Höhe $y_2 = h$ erreicht die Kugel, wenn sie bei $y_0 = 0$ mit $v_0 = 0$ startet?
   Zeichne in **ein** yW-Diagramm die Grafen aller auftretenden Energieformen!
   Berechne die Geschwindigkeit der Kugel in Abhängigkeit von y und zeichne das yv-Diagramm. Wo ist die Geschwindigkeit maximal und wie groß ist $v_{\max}$?



4. Auf einen Golf-GTI der Masse $m = 900\,\mathrm{kg}$ wirkt die Antriebskraft $F = 1530\,\mathrm{N}$. In welcher Zeit beschleunigt das Auto von Null auf $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

5. Ein Auto fährt mit $v_0 = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gegen eine Wand. Welcher Kraft müssen die Sicherheitsgurte des Fahrers der Masse $m = 70{,}0\,\mathrm{kg}$ standhalten, wenn der Wagen auf einer Strecke von $\Delta x = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (Knautschzone) zum stehen kommt und eine konstante Beschleunigung mit dem Betrag a angenommen wird?

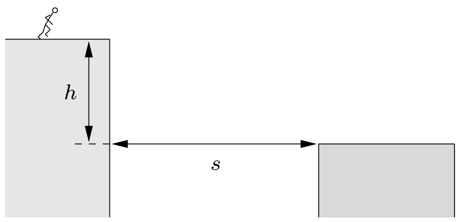
6. Ein ICE hat mit der Lok die Gesamtmasse $M = 327\,\mathrm{t}$, die Lok allein hat die Masse $m = 72{,}0\,\mathrm{t}$. Die Haft- und Gleitreibungszahlen zwischen den Rädern des Zuges und den Gleisen sind $\mu_\mathrm{H} = 0{,}150$ und $\mu = 9{,}00 \cdot 10^{-2}$, die Rollreibung darf vernachlässigt werden.

   (a) Welche maximale Beschleunigung a kann der Zug auf waagrechten Schienen erreichen, wenn die Motorkraft beliebig groß ist?

   (b) Der Zug beginnt zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x_0 = 0$ eine Bewegung mit eben dieser maximalen Beschleunigung, bis zur Zeit $t_1 = 150\,\mathrm{s}$ die Notbremse gezogen wird. Dabei blockieren *alle* Räder des Zuges. Berechne den Bremsweg s und zeichne ein tv- und ein tx-Diagramm der ganzen Bewegung in geeignet gewählten Einheiten.

   (c) Untersuche, ob unser Zug für die Befahrung der Strecke Garmisch-Klais (220 Höhenmeter auf 11 km Streckenlänge) geeignet ist. Je mehr Aspekte dein Gutachten enthält, um so besser!

7. Ein auf einem Hochhausdach in Bedrängnis geratener Spion versucht sich durch einen Sprung über die $s = 12{,}0\,\mathrm{m}$ breite Straßenflucht auf das um $h = 5{,}00\,\mathrm{m}$ tiefer gelegene Dach des Nachbarhauses zu retten. Gehe davon aus, dass es sich bei dem Verfolgten um einen guten Sprinter handelt (100 m in 10,0 s) und untersuche die Erfolgsaussichten seines Vorhabens. Deine Ergebnisse sind durch Zeichnungen und Rechnungen zu belegen, der Luftwiderstand darf vernachlässigt werden.



8. Der Dachdecker und die Tonne I
   Über ein Rolle sind der Dackdecker (75kg) mit einer Tonne (25kg) mit Ziegel (250kg) verbunden. Zu Beginn befindet sich die Tonne im 6. Stock (3m pro Stockwerk) und der Dachdecker am Boden.

   (a) Fertige eine Skizze mit den wirkenden Kräften an. Welche Beschleunigung erfährt der Dachdecker?

   (b) Welche Höhenenergie hat die Tonne mit den Ziegeln zu Beginn?

   (c) Welche Energieumwandlungen findet statt, wenn der Dachdecker bis zum 6. Stock nach oben gezogen wird?

   (d) Welche Höhenenergie hat der Dachdecker im 6. Stock?

   (e) Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Dachdecker im 6. Stock an?

9. Der Dachdecker und die Tonne II
   Über ein Rolle sind der Dackdecker (75kg) mit einer Tonne (25kg) mit Ziegel (250kg) verbunden. Der Dachdecker wird von der Tonne nach oben gezogen; die Tonne

bewegt sich nach unten. Beim Aufprall der Tonne auf dem Boden fällt der Boden aus der Tonne und die Ziegel fallen heraus. Nun bewegt sich der Dachdecker wieder nach unten.

(a) Fertige eine Skizze mit den wirkenden Kräften an. Welche Kraft und Beschleunigung erfährt der Dachdecker?
(b) Welche Höhenenergie hat die Tonne bzw. der Dachecker im 6. Stock (3m pro Stockwerk)?
(c) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Dachdecker am Boden auf?
(d) Nun reißt das Seil. Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Tonne am Boden auf?

10. Ein Hybridauto wird von einem Benzin- und von einem Elektromotor angetrieben. Beim Bremsen des Autos wird die kinetische Energie mit Hilfe eines Dynamos in einem Akku gespeichert. Der Akku treibt bei Bedarf den Elektromotor an (Wirkungsgrad $\eta = 80\%$). Der Verbrennungsmotor des Autos bringt mit einem Liter Benzin die Energie 9,0 MJ auf die Straße.

    Das Auto der Masse $m = 800\,\mathrm{kg}$ bremst bei einer Fahrt durch die Stadt 50 mal von der Geschwindigkeit $v_1 = 54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf $v_2 = 18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ab. Wie viele Liter Benzin spart die dadurch im Akku gespeicherte Energie ein?

11. **Bungee-Springen mit der Feder**

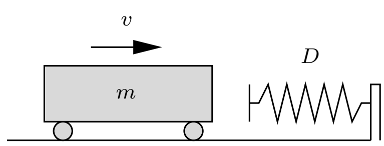
    An einer Feder mit der Federhärte $D = 1\frac{N}{m}$ hängt ein Massestück mit 20g. Die Feder hat dann eine Länge von $l_1 = 30cm$.

    (a) Wie lange wäre die Feder, wenn man das Massestück wegnehmen würde?
    (b) Wie kann man die Federhärte D experimentell bestimmen?

    Nun wird die Feder auf eine Länge von $l_2 = 100cm$ gedehnt und anschließend losgelassen. Das Massestück bewegt sich nach oben und springt über den Aufgängepunkt der Feder hoch.

    (c) Beschreibe die Energieumwandlungen die auftreten vom Loslassen des Massestücks bis zum Erreichen des Höchsten Punkts.
    (d) Berechne die Spannenergie der Feder im gedehnten Zustand.
    (e) Berechne die Sprunghöhe des Massestücks.
    (f) Nach Erreichen des höchsten Punkts fällt das Massestück auch den Boden. Mit welcher Geschwindigkeit trifft es dort auf?

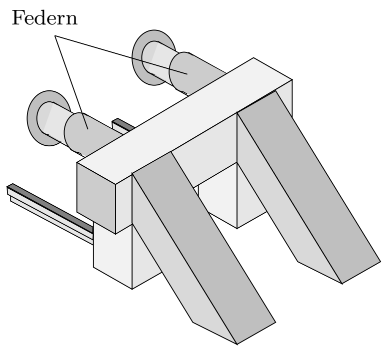
12. Ein Eisenbahnwaggon der Masse $m = 1{,}50 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}$ prallt mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf eine starke Feder mit der Federkonstanten D. Der Waggon kommt zum Stillstand, wenn die Feder um $\Delta x = 65\,\mathrm{cm}$ zusammengedrückt ist.



(a) Welche Energieumwandlung tritt während des Bremsvorgangs auf?

(b) Berechne D.

13. Der Prellbock am Ende eines Gleises enthält zwei starke Federn der Härte $D = 2{,}5 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ (je Feder). Ein Waggon der Masse $m = 18\,\mathrm{t}$ prallt mit der Geschwindigkeit $v = 18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf den Prellbock. Berechne die kinetische Energie des Waggons vor dem Aufprall und die Strecke x, um die die Federn zusammengedrückt werden.



14. (a) Welche Hubarbeit verrichtet ein Bauarbeiter der Masse $m = 75\,\mathrm{kg}$, der einen Zementsack der Masse $m_1 = 40\,\mathrm{kg}$ vom Garten in den zweiten Stock trägt ($h = 7{,}2\,\mathrm{m}$)?

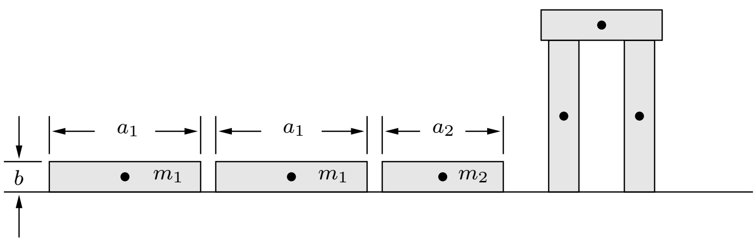
(b) Welche Reibungsarbeit wird von Käptn Hook verrichtet, der eine Schatzkiste mit der konstanten Kraft $F = 120\,\mathrm{N}$ 80 m über den Boden schleift?

(c) Welche Beschleunigungsarbeit wird an einer Gewehrkugel der Masse $m = 25\,\mathrm{g}$ verrichtet, die von null auf $v = 410\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt wird?

(d) Welche Spannarbeit wird an einer Feder der Härte $D = 4500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ verrichtet, die vom entspannten Zustand aus um 6,4 cm zusammengedrückt wird?

15. Mit drei quaderförmigen, am Boden liegenden Betonblöcken wird ein Modell eines Teils von Stonehenge (rechte Figur in der Abbildung) errichtet.

$$a_1 = 7{,}00\,\mathrm{m}$$
$$a_2 = 5{,}00\,\mathrm{m}$$
$$b = 1{,}60\,\mathrm{m}$$
$$m_1 = 45{,}0\,\mathrm{t}$$
$$m_2 = 32{,}0\,\mathrm{t}$$



(a) Welche Gesamtarbeit W_{ges} wird beim Aufrichten der Blöcke verrichtet? Du darfst dir die ganze Masse der Betonblöcke in ihren Mittelpunkten (Schwerpunkten) vereint denken.

(b) Der obere Block wird von einem Kran vom Boden aus in seine Endlage gebracht. Der Kran wird von einem Elektromotor mit der elektrische Leistung $P_{\mathrm{e}} = 10{,}0\,\mathrm{kW}$ und dem Wirkungsgrad 80 % angetrieben. Wie lange dauert das Anheben des Blocks?

(c) Durch eine Unvorsichtigkeit fällt der obere Block wieder herunter. Mit welcher Geschwindigkeit v prallt er auf den Boden?

16. **Umrechnen von Einheiten**

(a) Das 2004 in Dienst gestellte Passagierschiff Queen Mary 2 hat eine Höchstgeschwindigkeit von 29,6 kn. Dabei ist $1\,\mathrm{kn} = 1\,\frac{\mathrm{sm}}{\mathrm{h}}$. Hierbei bedeutet 1 sm eine Seemeile. Eine Seemeile sind 1852 m. Gib die Höchstgeschwindigkeit der Queen Mary 2 in der Einheit $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an.

(b) Am 7.7.1999 in Rom stellte Hicham El Guerrouj den Weltrekord über eine Meile (das sind 1609,344 m) in einer Zeit von 3 : 43,13 min auf. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit in der Einheit $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bzw. $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ lief Hicham El Guerrouj diesen Rekord?

Verwende in den folgenden Teilaufgaben $9{,}80665\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für die Fallbeschleunigung.

(a) 1 PS ist definiert als die Leistung, die erbracht werden muss, um einen Körper der Masse $m = 75\,\mathrm{kg}$ entgegen dem Schwerkraftfeld der Erde mit einer Geschwindigkeit von $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu bewegen. Gib 1 PS in der Einheit 1 kW an.

(b) Pound per square inch (Pfund pro Quadratzoll) ist eine in den USA gebräuchliche Maßeinheit des Drucks. Diese Einheit wird mit 1 psi abgekürzt. 1 Inch sind 2,54 cm und 1 pound 0,454 kg. Gib 1 psi in der Einheit $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ an.

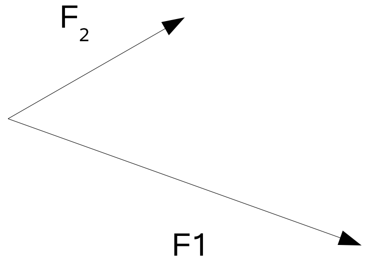
(c) Ein Torr oder auch Millimeter-Quecksilbersäule — benannt nach dem italienischem Physiker und Mathematiker Evangelista Torricelli — ist der statische Druck, der von einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe erzeugt wird. Die Dichte von Quecksilber ist $13{,}546\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}$. Gib ein Torr in der Einheit Pascal an.

Helmut-Schmidt-Universität

Vorkurs Mathematik - Physik-Aufgaben

1. Ein Vielfachmessgerät hat bei Spannungsmessungen einen Fehler von 2 % und bei Strommessungen einen Fehler von 0,5 %. Mit dem Gerät wird an einem Widerstand R die Spannung $U = 10{,}00\,\mathrm{V}$ und durch den Widerstand der Strom $I = 0{,}200\,\mathrm{A}$ gemessen. Berechne R mit Angabe des absoluten und relativen Fehlers! Rechne zuerst den maximalen und den minimalen Wert aus, den R annehmen kann!
   Welches Gesetz vermutet man für den relativen Fehler eines Quotienten von zwei ungenauen Zahlen?

2. Bei einem Spaziergang wird Toni von seinen beiden Hunden mit den Kräften F_1 und F_2 ungestüm in verschiedene Richtungen gezogen (vgl. Abb.). Konstruiere die wirkende Gesamtkraft



3. Bei einem Spaziergang wird Toni von seinen beiden Hunden mit den Kräften $F_1 = 200N$ und $F_2 150N$ ungestüm in verschiedene Richtungen gezogen. Die Leinen der Hunde schließen einen Winkel von 60° ein. Wie groß ist wirkende Gesamtkraft?

4. Ein Mann hat die Masse 80,0kg. Er besitzt 5,8l Blut der Dichte $1,06 g/cm^3$. Wie viel Prozent seiner Gesamtmasse macht das Blut aus?

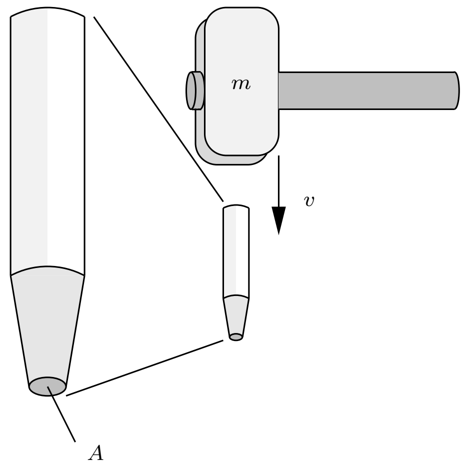
   Quelle: Julia Pürkner

5. Wir können einen Atomkern vereinfacht als winziges Kügelchen auffassen. Der Radius r eines solchen Kügelchens hängt von der Anzahl A der Nukleonen (das sind Protonen und Neutronen) im Kern ab. Es gilt $r \approx 1{,}4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m} \cdot \sqrt[3]{A}$. Ein Nukleon hat etwa eine Masse von $m_\mathrm{N} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

   (a) Schätze die Dichte von Kernmaterie für $A = 12$ ab.
   (b) Welche Masse hätte in etwa ein Würfel der Kantenlänge 1,0 cm und der Dichte von Kernmaterie? Wie vielen Mittelkklassewagen einer Masse von jeweils 1,5 t entspricht dies?

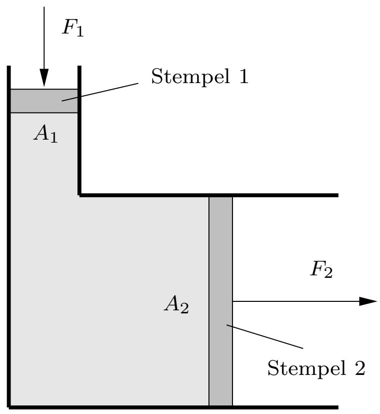
(c) Welchen Radius hätte in etwa eine Kugel der Erdmasse $m_{\text{Erde}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ und der Dichte von Kernmaterie?

6. Ein Stahlstift wird mit seiner „Spitze“ der Fläche $A = 20\,\text{mm}^2$ auf ein Kupferblech aufgesetzt. Mit einem Hammer der Masse $m = 400\,\text{g}$ wird auf den Stift geschlagen. Der Hammer hat kurz vor dem Aufprall die Geschwindigkeit $v = 5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und wird in der Zeit $\Delta t = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$ auf null abgebremst. Welchen Druck übt die Spitze des Stiftes während des Abbremsvogangs des Hammers auf das Kupferblech aus?



7. Das kreisförmige Bullauge einer Tauchglocke hat den Radius $r = 15\,\text{cm}$. Welcher Kraft F muss das Bullauge standhalten, wenn die Glocke 11000 m tief taucht (Grund des Marianengrabens)? Welche Masse m hat eine Gewichtskraft, die gleich der Kraft F ist?

8. Für die Flüssigkeit in nebenstehend abgebildeter Hydraulik darf angenommen werden, dass sie total inkompressibel ist, sich also nicht zusammendrücken lässt.

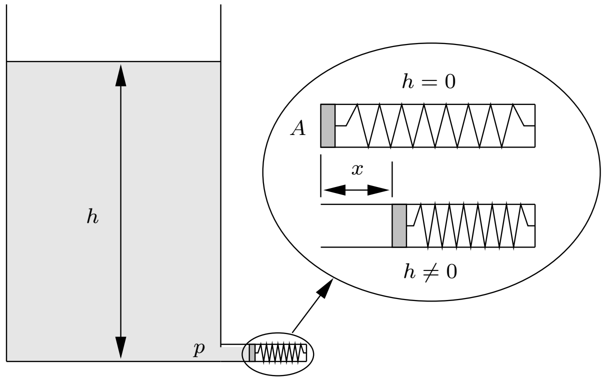


(a) Beweise, dass die von der Kraft F_1 am Stempel 1 verrichtete Arbeit W_1 gleich der vom Stempel 2 verrichteten Arbeit W_2 ist.

(b) Für die Hydraulik einer Autopresse gilt:
$F_1 = 8{,}00 \cdot 10^3\,\text{N}$
$F_2 = 4{,}00 \cdot 10^6\,\text{N}$
$A_2 = 2500\,\text{cm}^2$.

Berechne A_1. Wie weit muss sich der Stempel 1 bewegen, wenn sich Stempel 2 um 1,5 m nach rechts bewegt? Wie kann man das Problem des langen Weges von Stempel 1 technisch lösen?

9. Der Füllstandsanzeiger eines großen Wassertanks besteht aus einem Rohr mit einem gut eingepassten, reibungsfrei beweglichen Stempel der Querschnittsfläche $A = 4{,}00\,\mathrm{cm}^2$ und einer Feder mit der Härte $D = 196\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Ohne Wasser ($h = 0$) schließt der Stempel mit dem linken Ende des Rohrs ab (siehe Abbildung).



Der Füllstand des Wassers beträgt jetzt $h = 5{,}00\,\mathrm{m}$. Berechne den Druck p am Boden des Tanks, die Kraft F auf den Stempel und die Strecke x, um die die Feder zusammengedrückt wird.

10. **Grundwissen**

    (a) Ein PKW fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf der Autobahn. Wie lange braucht das Auto für eine 200 m lange Strecke?

    (b) Wird ein geeichtes 50 g-Stück an eine Feder gehängt, dann dehnt sich diese um 7,5 cm. Hängt man statt dessen einen Schlüssel an die gleiche Feder, dann dehnt sie sich um 4,8 cm. Welche Masse hat der Schlüssel?

11. Bei km 30 auf der Autobahn München-Stuttgart findet ein Raubüberfall statt. Der Täter flüchtet mit seinem klapprigen Auto mit der Geschwindigkeit $v_1 = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in Richtung Stuttgart. Zwanzig Minuten später nimmt ein Polizeiauto vom Autobahnbeginn aus mit $v_2 = 150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die Verfolgung auf.

    (a) Zeichne die Weltlinien beider Autos in *ein* Diagramm!
    Verwende die Einheiten $10\,\mathrm{min} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ und $20\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$!

    (b) Wann und wo holt die Polizei den Täter ein? Grafische und rechnerische Lösung!

12. Kurze Ultraschallimpulse werden in einem zeitlichen Abstand von $\Delta T = 0{,}75\,\mathrm{s}$ von hinten auf ein durch Garmisch fahrendes Auto gerichtet, dort reflektiert und am Ort des Senders in einem zeitlichen Abstand von $\Delta t = 0{,}85\,\mathrm{s}$ wieder registriert. Berechne die Geschwindigkeit v des Autos! (Es herrscht Windstille und eine Temperatur von 20 °C; die Schallgeschwindigkeit bei 20 °C beträgt $c_s = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.)
    Zeichne als Überlegungsfigur ein übersichtliches tx-Diagramm!

13. Der böse Blofield startet zur Zeit $t_1 = 60\,\mathrm{s}$ am Ort $x = 0$ mit einer Phantom und einer Atombombe an Bord in Richtung Buckingham-Palast, der sich am Ort $x_{20} = 100\,\mathrm{km}$ befindet. Blofields Geschwindigkeit ist $v_1 = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. James Bond, der alles schon im Voraus weiß, startete bereits zur Zeit Null am Buckinham-Palast und fliegt Blofield mit seinem Minisuperjet entgegen. Bond legt dabei in der Minute

30 km zurück. Bond hat Abwehrraketen an Bord, die in einer Sekunde 1200 m über Grund zurücklegen und genau $\Delta t = 36\,\mathrm{s}$ nach dem Abschuss detonieren.

(a) Zeichne in ein tx-Diagramm die Weltlinien von Blofield und Bond ein ($20\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ und $20\,\mathrm{km} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

(b) Stelle die Gleichungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Weltlinien von Blofield und Bond auf. Zu welcher Zeit t_T und an welchem Ort x_T treffen die Beiden aufeinander?

(c) Zu welcher Zeit T muss Bond seine Rakete gegen Blofield abfeuern, damit sie genau beim Zusammentreffen mit Blofield explodiert? Zeichne die Weltlinie der richtig abgefeuerten Rakete in das schon vorhandene Diagramm ein.
Hilfe: Drücke zunächst den Startort x_{30} und die Aufprallzeit T_0 der Rakete durch T aus!

14. Aus dem Fahrplan der eingleisigen Bahnstrecke Garmisch–Partenkirchen–Murnau ist folgender Fahrplanauszug gegeben:

km	Haltestelle	RB21883		RB21892	
		Ankunft	Abfahrt	Ankunft	Abfahrt
0	Garmisch–Partenkirchen	7:16			6:56
9	Oberau	7:07	7:08	7:03	7:09
14	Eschenlohe	7:01	7:02	7:15	7:16
19	Ohlstadt	6:57	6:57	7:20	7:21
29	Murnau		6:51	7:28	

(a) Stelle die Fahrt der beiden Züge in einem graphischen Fahrplan (= gemeinsames Zeit–Ort–Diagramm, t–s–Diagramm) dar.
(DIN A4 quer, Maßstab auf der Zeitachse: 1 cm für 2 min, Bereich 6:50 Uhr $\leqq$ 7:40 Uhr, Maßstab auf der Ortsachse: 1 cm für 2 km)

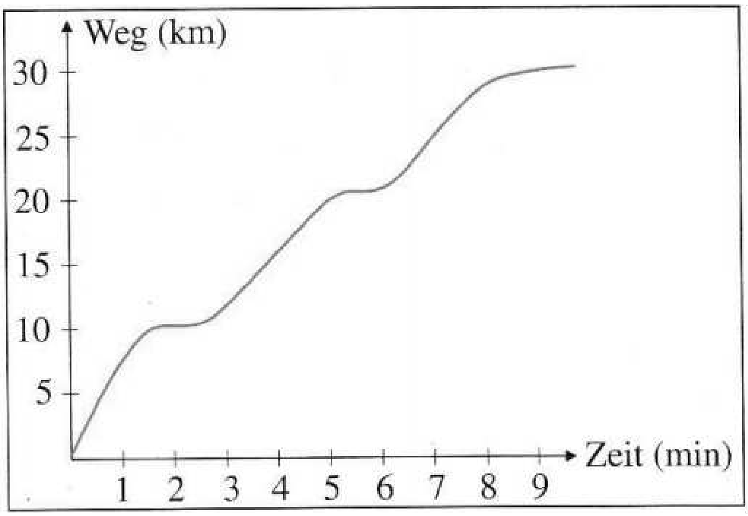
(b) Berechne die Geschwindigkeit der Züge auf den einzelnen Streckenabschnitten. Wie kann man die dafür benötigten Daten aus der Tabelle, wie aus dem Diagramm entnehmen?

(c) Auf welchem Abschnitt ist welcher Zug am langsamsten, wo welcher am schnellsten? Woran erkennt man dies im Diagramm?

(d) Der Zug **RB21892** muss gleich nach dem ersten Streckenabschnitt in Oberau 6 min warten, um den Gegenzug passieren zu lassen. Wie erkennt man diese Situation im Diagramm? Überlege dir Optimierungsmöglichkeiten für den Fahrplan.

(e) Der Zug **RB21883** hat Verspätung. Ab welcher Verspätung wäre es sinnvoll, den Zug **RB21892** in Oberau nicht warten zu lassen, um die Züge in einem anderen Ort passieren zu lassen? Probiere graphisch verschiedene Möglichkeiten aus.

15. **Rennwagen**



(a) Beschreibe die Fahrt des Rennwagens.

(b) Wie weit kommmt der Rennwagen in den ersten vier Minuten, wie weit kommt er über den gesamten Zeitraum?

(c) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit über den gesamten Zeitraum ungefähr?

(d) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen der dritten und fünften Minute ungefähr?

(e) Wann ändert sich die zurückgelegte Weglänge pro Minute am stärksten, wann am wenigsten?

(f) Skizziere eine mögliche Strecke, die der Wagen gefahren sein kann. Erkläre deine Strecke mit den Ergebnissen aus a)bis e).

(g) Skizzieren den dazugehörigen Zeit-Geschwindigkeits-Graphen.

(h) In welchen Phasen beschleunigt bzw. , bremst das Fahrzeug? Erkläre deine Vermutung erst am Zeit-Weg-Graphen, dann am Zeit-Geschwindigkeits-Graphen. Wo ist sie leichte zu erklären?

Quelle: Veränderungen verstehen - aus qualitativer Sicht, Stefan Hußmann, PM Heft 31, Februar 2010, 52.Jg, S. 4-8

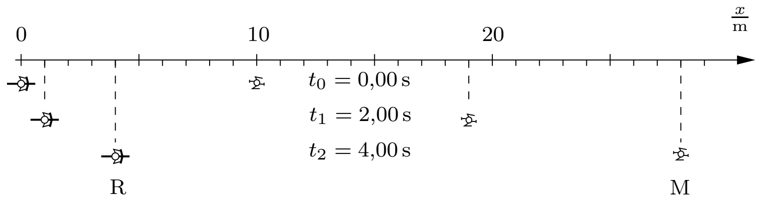
16. Ein Schnellzug fährt die 200 km lange Strecke zwischen München und Nürnberg mit einer als konstant angenommenen Geschwindigkeit von $108\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Trage die zu dieser Bewegung gehörende Kurve in ein t–v–Diagramm ein. Als Einheit für die Zeitachse soll eine Sekunde gewählt werden.

17. Ein Projektil wird in einem $s = 50\,\mathrm{cm}$ langen Gewehrlauf auf $v = 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt. Berechne die Beschleunigung a und die Zeitdauer t des Beschleunigungsvorgangs.

18. Ein Auto beschleunigt in $t = 10{,}8\,\mathrm{s}$ von $v_0 = 0$ auf $v = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Berechne die Beschleunigung a und die Beschleunigungsstrecke s.

19. Ein Auto fährt mit $v_0 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ dahin. Plötzlich taucht 125 m vor dem Wagen ein Reh auf. Nach einer Schrecksekunde bremst der Fahrer und erteilt somit seinem Auto die Beschleunigung $a = -4{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Gibt es einen Rehbraten oder nicht? Zeichne das tx-Diagramm.

20. Die Luftaufnahme einer Überwachungskamera zeigt einen Radfahrer (R) und einen Marathonläufer (M) zu drei verschiedenen Zeiten. Der Radfahrer startet zur Zeit $t_0 = 0$ mit der konstanten Beschleunigung a.



   (a) Ermittle a und die Geschwindigkeit v_M des Läufers aus den Daten des Überwachungsfotos.

   (b) Stelle die Funktionsgleichungen für die Geschwindigkeiten ($v_\mathrm{M}(t)$, $v_\mathrm{R}(t)$) und die Orte ($x_\mathrm{M}(t)$, $x_\mathrm{R}(t)$) der beiden Sportler auf.

   (c) Wann (t_3) und wo (x_3) holt der Radfahrer den Läufer ein? Welche Geschwindigkeit hat der Radfahrer zu diesem Zeitpunkt?

   (d) Genau zur Zeit t_3 beginnt der Radfahrer einen Bremsvorgang und erteilt sich und dem Fahrrad die Beschleunigung $a' = -1{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wann ($t_4$) kommt der Radler zum Stillstand? Zeichne das tv-Diagramm des Radlers und berechne $x_\mathrm{R}(t_4)$ ($t = 10\,\mathrm{s} \,\widehat{=}\, 5\,\mathrm{cm}$, $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \,\widehat{=}\, 5\,\mathrm{cm}$).

   (e) Stelle die Funktionsgleichung für den Ort $x_\mathrm{R}(t)$ des Radlers zwischen t_3 und t_4 auf und zeichne die Grafen der Funktionen $x_\mathrm{M}(t)$ und $x_\mathrm{R}(t)$ im Intervall $[0\,;\,30\,\mathrm{s}]$ in ein Diagramm ($t = 10\,\mathrm{s} \,\widehat{=}\, 5\,\mathrm{cm}$, $x = 10\,\mathrm{m} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm}$). Wann ($t_5$) holt der Läufer den ruhenden Radler ein?

21. Der BMW 645 Ci beschleunigt laut Hersteller in 6,1 s von 0 auf $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie lange dauert es bis das Fahrzeug seine Höchstgeschwindigkeit von $240\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht, wenn wir unterstellen, dass diese Beschleunigung auch für größere Geschwindigkeiten als $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ Gültigkeit hat. Wieso ist die Annahme der konstanten Beschleunigung bis zur Höchstgeschwindigkeit des Fahrzeugs falsch?

22. Wie lange braucht ein Stein für den Fall von einem 60 m hohen Turm? Mit welcher Geschwindigkeit prallt er auf den Boden?