Vorkurs Mathematik

Prof. Dr. Markus Bause und Dr. Wolfgang Zeuge

Helmut–Schmidt–Universität

Universität der Bundeswehr Hamburg

Fakultät für Maschinenbau

bause@hsu-hh.de

wzeuge@hsu-hh.de

http://www.hsu-hh.de/mb-mathe

2. April 2013

HELMUT SCHMIDT
UNIVERSITÄT

Universität der Bundeswehr Hamburg

1 Umformungen und Quadratische Gleichungen

Vorbemerkungen:

- Die **Grundrechenarten** und die **Bruchrechnung** sollte Ihnen noch geläufig sein. Trotzdem zum Einstieg einige Beispiele:

$$\textbf{i)}\quad \frac{5}{12}-\frac{3}{8}+\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{10-9+20-6}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}\ .$$

$$\textbf{ii)}\quad \frac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{2}{5}}\cdot\left(2-\frac{1}{7}\right)=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{13}{5}}\cdot\frac{13}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{7}=\frac{5}{3}\ .$$

$$\textbf{iii)}\quad \frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)\cdot(x+a)}=\frac{2a}{x^2-a^2}\ .$$

- Eine **quadratische Gleichung** in „Standardform“ $x^2+p\,x+q=0\ ,\ p,q\in\mathbb{R}\ ,$ hat die beiden reellen Lösungen

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\quad (p,q\text{–Formel})\ ,$$

falls der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist. Anderenfalls gibt es nur (hier nicht betrachtete) komplexe Lösungen. Beispiele:

$$\textbf{i)}\quad x^2-6x+5=0\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{3^2-5}\quad\Rightarrow\quad x_1=1\ ,\ x_2=5\ .$$

$$\textbf{ii)}\quad x^2-4x+5=0\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{2^2-5}\quad\Rightarrow\quad \text{keine reelle Lösung.}$$

- Eine **Wurzelgleichung** wird durch Quadrieren gelöst. Dabei können (Schein–)Lösungen entstehen, die keine Lösung der ursprünglichen Gleichung sind. Eine Probe ist also **unbedingt** erforderlich.
  Achtung: Beim Quadrieren von Summen die Binomische Formel nicht vergessen!
  Beispiele: **i)**

$$\begin{aligned}
2x+1 &= 3\sqrt{x+5} && \mid\ (.)^2\\
4x^2+4x+1 &= 9\cdot(x+5) && \mid\ \text{Zusammenfassen}\\
4x^2-5x-44 &= 0 && \mid\ :4\\
x^2-\frac{5}{4}x-11 &= 0 && \mid\ p,q\text{–Formel}\\
x_{1,2} &= \frac{5}{8}\pm\sqrt{\frac{25+11\cdot 64}{64}}=\frac{5}{8}\pm\frac{27}{8}
\end{aligned}$$

$$x_1=\frac{-22}{8}=\frac{-11}{4}\quad,\quad x_2=\frac{32}{8}=4\ .$$

Die Proben ergeben:

$$x_1=\frac{-11}{4}\ :\qquad 2\cdot\frac{-11}{4}+1\stackrel{?}{=}3\cdot\sqrt{\frac{-11}{4}+5}\ \Rightarrow\ \frac{-9}{2}\neq\frac{9}{2}\ .$$

$$x_2=4:\qquad 2\cdot 4+1\stackrel{?}{=}3\cdot\sqrt{4+5}\ \Rightarrow\ 9=9\ .$$

$x_2=4$ ist somit die einzige Lösung der Wurzelgleichung. Die Scheinlösung $x_1=-11/4$ ist beim Quadrieren entstanden.

ii)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4x-3} &= \sqrt{2x+2}+1 && \mid\ (.)^2 \\
4x-3 &= (2x+2)+2\cdot\sqrt{2x+2}+1 && \mid\ -2x-3 \\
2x-6 &= 2\cdot\sqrt{2x+2} && \mid\ :2 \\
x-3 &= \sqrt{2x+2} && \mid\ (.)^2 \\
x^2-6x+9 &= 2x+2 && \mid\ -2x-2 \\
x^2-8x+7 &= 0 && \mid\ p,q\text{–Formel} \\
x_{1,2} &= 4\pm\sqrt{16-7} = 4\pm 3 \\
x_1 = 4-3 = 1 \quad &, \quad x_2 = 4+3 = 7\,.
\end{aligned}
$$

Die Probe geht für $x_2 = 7$ auf, während $x_1 = 1$ keine Lösung der Wurzelgleichung ist.

- Bei der **biquadratischen Gleichung** $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ ergibt die Substitution $t := x^2$:

$$
\begin{aligned}
t^2-4t-45 &= 0 && \mid\ p,q\text{–Formel} \\
t_{1,2} &= 2\pm\sqrt{4+45} = 2\pm 7 \\
\Rightarrow \quad t_1 &= +9 = x^2 && \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm 3 \\
t_2 &= -5 = x^2 && \Rightarrow\ \text{keine weiteren rellen Lösungen}
\end{aligned}
$$

- Für **Potenzen** und **Logarithmen** gelten folgende Rechenregeln:

  $x, y > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} = 2.71828...$(Euler'sche Zahl)

i)	$x^0 = 1$	**ii)**	$x^1 = x$
iii)	$x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$	**iv)**	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
v)	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	**vi)**	$\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
vii)	$x^a \cdot y^a = (xy)^a$	**viii)**	$\dfrac{x^a}{y^a} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$
ix)	$(x^a)^b = x^{a\cdot b}$	**x)**	$\ln(1) = 0$
xi)	$\ln(\mathrm{e}^a) = a$	**xii)**	$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
xiii)	$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$	**xiv)**	$\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
xv)	$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$	**xvi)**	$\ln(x^a) = a\cdot\ln(x)$

Aufgaben:

1. Fassen Sie die Ausdrücke zu einem Bruch zusammen und kürzen Sie so weit es geht. (Möglichst ohne Taschenrechner!)

i) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{7}{12}$ **ii)** $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}$

iii) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{5}$ **iv)** $\left(3+\dfrac{3}{7}\right):\left(3-\dfrac{3}{8}\right)$

v) $\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5+\frac{1}{3}}}$ **vi)** $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}$

vii) $\dfrac{a}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a-b}$ **viii)** $\dfrac{2}{1-\dfrac{a}{2-\frac{a}{3}}}$

ix) $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}-\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$ **x)** $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{a+b}{ab}}-1$

2. Geben Sie alle (reellen) Lösungen folgender Gleichungen bzw. Gleichungssysteme an:

i) $(2x+1)^2=49$ **ii)** $(2x+1)^3=-27$

iii) $2x^2-3x-14=0$ **iv)** $-2x^2=14x+25$

v) $\dfrac{3x+\frac{5}{4}}{2x-\frac{1}{2}}-2=x-\dfrac{3}{4}$ **vi)** $3\cdot\dfrac{\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{3x+2}+2=3x+\dfrac{3}{2}$

vii) $4x^4-25x^2+36=0$ **viii)** $x^3-10x^2=24x$

ix) $\sqrt{2x+2}=x-\dfrac{1}{2}$ **x)** $\sqrt{6x-2}-\sqrt{2x-2}=2$

xi) $2\sqrt{5x+7}+\sqrt{\frac{5}{2}x+4}=3$ **xii)** $\left\{\begin{array}{rcl} 3x^2-2y+3 &=& 0\\ 5x-4y+5 &=& 0\end{array}\right.$

xiii) $\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{x-y}+x &=& 2y\\ 3x-4y &=& 1\end{array}\right.$ **xiv)** $\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{-4y-2x}-1 &=& 0\\ \sqrt{2x^2-x+6y} &=& x+y\end{array}\right.$

3. Schreiben Sie in der angedeuteten Form bzw. vereinfachen Sie. (Möglichst ohne Taschenrechner!)

i) $\dfrac{a^{-2}\sqrt{a}}{\frac{1}{a^4}}=a^{\cdots}$ **ii)** $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}=a^{\cdots}$

iii) $\dfrac{\left(a^2\right)^4}{a^{(2^4)}}=a^{\cdots}$ **iv)** $\left(\dfrac{-2a}{b}\right)^4:\left(\dfrac{-a^2}{2b}\right)^{-3}=\ldots a^{\cdots}\,b^{\cdots}$

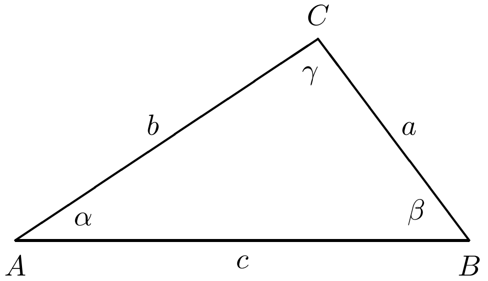
v) $\dfrac{a^{-2}}{\sqrt{a^{-5}}}:\dfrac{\sqrt{a}}{a^{-4}}=a^{\cdots}$ **vi)** $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\ldots$

vii) $\mathrm{e}^{2\cdot\ln(8)-\ln(16)+\ln(5)}=\ldots$ **viii)** $\mathrm{e}^{3\cdot\ln(x)+\ln 7}=\ldots x^{\cdots}$

ix) $\ln(2\cdot\mathrm{e}^{3x+5})=\ldots$ **x)** $\ln\left(\mathrm{e}^7\cdot\mathrm{e}^{2x^2-3}\right)=\ldots$

2 Geometrie

Vorbemerkungen:



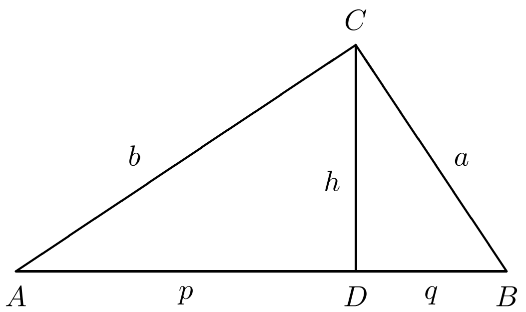
Standardbezeichnung der Punkte, Seiten und Winkel in einem Dreieck.

- In einem **(allgemeinen) Dreieck** gelten folgende Beziehungen:

Sinussatz: $$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad .$$

Cosinussatz: $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad , \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \quad , \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \quad . \end{aligned}$$

Fläche: $$F_\Delta = \frac{bc \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{ac \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{ab \cdot \sin(\gamma)}{2} \quad .$$



Standardbezeichnungen in einem rechtwinkligen Dreieck.

- In einem **rechtwinkligen Dreieck** mit γ als rechtem Winkel gilt:

Der Satz des PYTHAGORAS: $a^2 + b^2 = c^2$.

Der Kathetensatz des EUKLEIDES: $a^2 = qc$, $b^2 = pc$.

Der Höhensatz des EUKLEIDES: $h^2 = pq$.

- **Dreieck aus drei gegebenen Seiten:**

  Die Aufgabe ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die größte Seite kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten ist.

  Gegeben sei: $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.

  Mit Hilfe des Cosinussatzes läßt sich ein Winkel berechnen, z.B. der Winkel α :

$$\cos(\alpha) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \quad .$$

Da die Kosinusfunktion in Bereich von 0 bis 180^0 eindeutig umkehrbar ist, erhalten wir den Winkel direkt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{43}{48}\right) = 26.38^o \quad .$$

Den nächsten Winkel, z.B. γ , kann man jetzt sowohl mit dem Kosinussatz als auch mit dem Sinussatz bestimmen. Die Bestimmung mit dem Kosinussatz ist günstiger, da das Ergebnis eindeutig ist:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab}\right) = \arccos\left(\frac{-11}{24}\right) = 117.28^o \quad .$$

- **Dreieck aus zwei Seiten und einem Winkel:**

  Die Aufgabe ist eindeutig lösbar, wenn entweder ***a)*** *der eingeschlossene oder* ***b)*** *der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist. Wenn* ***c)*** *der der kürzeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, dann gibt es — mit Ausnahme des eindeutig lösbaren Falls eines rechtwinkligen Dreiecks — entweder zwei oder keine Lösung.*

  a) Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel:

  Gegeben sei: $a = 3$, $b = 5$, $\gamma = 60^o$.

  Der Kosinussatz liefert die fehlende Seite:

  $$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\gamma)} = \sqrt{19} = 4.359 \quad .$$

  b) Dreieck aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel:

  Gegeben sei: $a = 6$, $b = 5$, $\alpha = 45^o$.

  Der Sinussatz liefert den Winkel β :

  $$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} \quad .$$

  Von den beiden Lösungen im Bereich 0 bis 180^o ist nur die kleinere brauchbar, da sonst $\alpha+\beta > 180^o$ wäre.

  $$\beta = \arcsin\left(\frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{6\cdot\sqrt{2}}\right) = 36.10^o \quad .$$

  c) Dreieck aus zwei Seiten und dem der kürzeren gegenüberliegenden Winkel:

  Die Vorgaben $a = 3$, $b = 7$, $\alpha = 30^o$ führen zu einem Widerspruch:

  $$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} = \frac{7}{6} > 1 \quad .$$

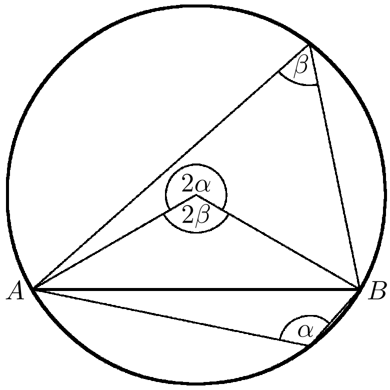
  Dagegen führt die Vorgabe $a = 5$, $b = 7$, $\alpha = 30^o$ zu zwei Lösungen: Aus

  $$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} = \frac{7}{10}$$

  folgt

  $$\beta_1 = \arcsin(0.7) = 44.43^o \quad \text{und} \quad \beta_2 = 180^o - \arcsin(0.7) = 135.57^o \quad .$$

  Das erste sich ergebende Dreieck ist spitzwinklig, das zweite stumpfwinklig.



- **Peripherie–Zentriwinkelsatz:**

  Wenn ein Kreis von einer Sehne AB geschnitten wird, so sind die Peripheriewinkel oberhalb (unterhalb) der Sehne jeweils gleich der Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels. weiter gilt offensichtlich:

  $$\alpha + \beta = 180^o \quad .$$

  Wenn die Sehne durch den Kreismittelpunkt geht, so haben wir den Spezialfall des „Thaleskreises“ mit $\alpha = \beta = 90^o$.

Aufgaben:

4. Bestimmen Sie bei folgenden Dreiecken die gesuchten Größe, wenn es zwei Lösungen gibt, geben Sie bitte beide an. Eine Zeichnung zur Kontrolle anzufertigen ist sicherlich nützlich und hilfreich.

i) $a = 4\ ,\ b = 6\ ,\ c = 3\ ;\qquad F_\Delta = ?$

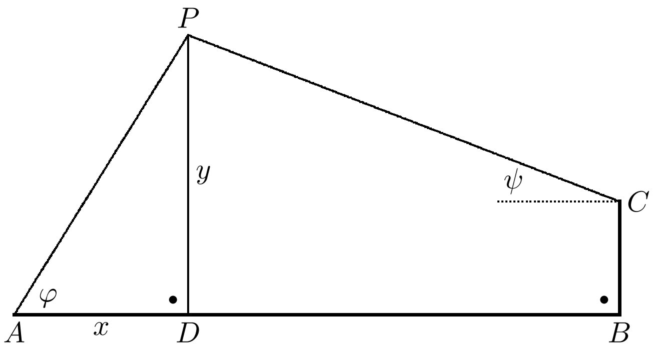
ii) $b = 3\ ,\ c = 5\ ,\ \gamma = 110^\circ\ ;\qquad F_\Delta = ?$

iii) $a = 4\ ,\ c = 5\ ,\ \alpha = 70^\circ\ ;\qquad F_\Delta = ?$

iv) $a = 4\ ,\ c = 5\ ,\ \alpha = 40^\circ\ ;\qquad F_\Delta = ?$

v) $a = 6\ ,\ c = 8\ ,\ F_\Delta = 12\ ;\qquad b = ?$

5. Vorwärtseinschneiden, d.h. von bekannter Basis das Objekt anpeilen.



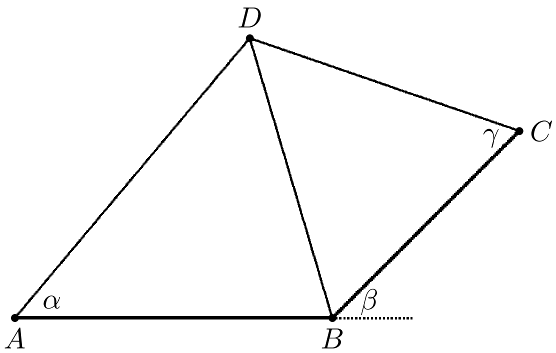
Die durch einen Punkt bezeichneten Winkel sind rechte. Die Winkel φ und ψ sind jeweils gegenüber der Horizontalen gemessen.

Gegeben: $AB = 8$, $BC = 1.5$, $\varphi = 58.13°$, $\psi = 21.10°$.

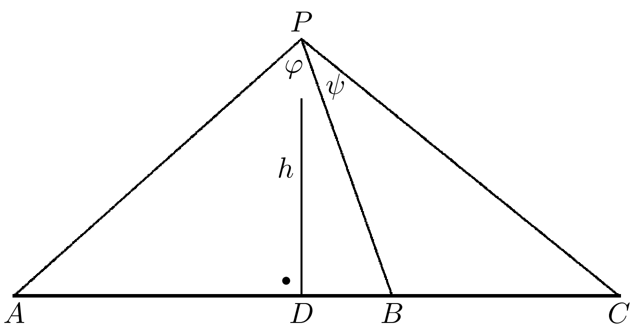
Gesucht: $x = AD$, $y = DP$.

Hinweis: Eine Lösungsmöglichkeit ist, zunächst das Dreieck ABC und dann das Dreieck ACP zu betrachten.

6. Gegeben: $AB = 6$, $BC = 5$, $\alpha = 50^o$, $\beta = 45^o$, $\gamma = 55^o$.
Gesucht: BD .



7. Rückwärtseinschneiden, d.h. vom Objekt die bekannte Basis anpeilen.



Der durch einen Punkt bezeichnete Winkel ist ein rechter.

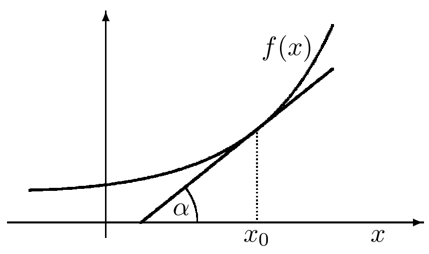
Gegeben: $AB = 5$, $BC = 3$, $\varphi = 67.62°$, $\psi = 31.57°$.

Gesucht: $h = DP$.

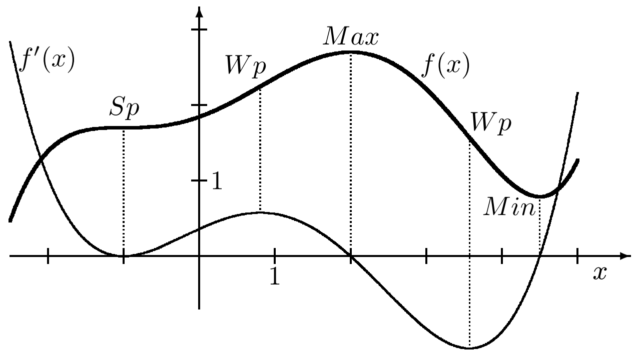
3 Differentialrechnung

Vorbemerkungen:

- Die **Ableitung** einer genügend glatten Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ist die „Steigung“ der zugehörigen Tangente, die den Graphen der Funktion im Punkt $(x_0\,,\,f(x_0))$ berührt (siehe die Abb.):
$$f'(x_0) = \tan(\alpha)\ .$$



- Eine Funktion $f(x)$ ist **differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle x des Definitionsbereichs eine Ableitung besitzt. Die **Ableitungsfunktion** (kurz oft auch Ableitung genannt) wird mit
$$f'(x) =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$
bezeichnet.



- Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien differenzierbar und α eine reelle Zahl. Es gelten dann folgende **Rechenregeln:**

I)	$\big(\alpha \cdot f(x)\big)' = \alpha \cdot f'(x)$	Homogenität
II)	$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$	Additivität
III)	$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Produktregel
IV)	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$	Quotientenregel
V)	$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$	Kettenregel

- Die **Ableitungen der elementaren Grundfunktionen** $(\alpha = \text{const}\,)$**:**

1a)	$(\alpha)' = 0$	1)	$\big(x^r\big)' = r \cdot x^{r-1}\ ,\ \ r \in \mathbb{R}$
1b)	$(x)' = 1$	2)	$\big(\mathrm{e}^x\big)' = \mathrm{e}^x$
1c)	$\big(x^2\big)' = 2x$	3)	$\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$
1d)	$\big(x^3\big)' = 3x^2$	4)	$\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$
1e)	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$	5)	$\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$
1f)	$\big(\sqrt{x}\big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	6)	$\big(\tan(x)\big)' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

(In der ersten Spalte stehen wichtige Spezialfälle der allgemeinen Formel 1)

Merke: Konstante **Summanden** verschwinden beim Ableiten, konstante **Faktoren** bleiben erhalten.

- **Beispiele:** (Es ist jeweils nur die „Hauptregel“ angegeben. Für die darin vorkommenden Ableitungen sind gegebenenfalls weitere Regeln notwendig.)

  a) $\left(7x^3 - 5x^2 + 6x + 12\right)' = 7 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 6 \cdot 1 + 0 = 21x^2 - 10x + 6$.

  (Summanden können einzeln abgeleitet werden, konstante Faktoren bleiben erhalten.)

  b) $\left(x^2 \cdot \sin(x)\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \left(\sin(x)\right)' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$.

  (Produktregel)

  c) $\left(\dfrac{x^2}{2x+1}\right)' = \dfrac{\left(x^2\right)' \cdot (2x+1) - x^2 \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x \cdot (2x+1) - x^2 \cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$.

  (Quotientenregel)

  d) $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \sin'\left(x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x$. (Kettenregel)

  e) $\left(\cos(\pi\, x)\right)' = -\pi \cdot \sin(\pi\, x)$, (Kettenregel)

  f) $\left(\mathrm{e}^{-4\,x}\right)' = -4 \cdot \mathrm{e}^{-4\,x}$, (Kettenregel)

  g) $\left(\left(3x^2 + 4x + 2\right)^6\right)' = 6 \cdot \left(3x^2 + 4x + 2\right)^5 \cdot (6x + 4)$, (Kettenregel)

  h) $\left(\left(x^2 - 5\right) \cdot \sin(3x+1)\right)' = 2x \cdot \sin(3x+1) + \left(x^2 - 5\right) \cdot \left(3 \cdot \cos(3x+1)\right)$.

  (Produktregel)

- **Beispiele** für höhere Ableitungen.

  a)

$$
\begin{aligned}
(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 5)''' &= (4x^3 - 9x^2 + 8x - 1)'' \\
&= (12x^2 - 18x + 8)' \\
&= 24x - 18 .
\end{aligned}
$$

  b)

$$
\begin{aligned}
\left(x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\right)''' &= \left(2x \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\right)'' \\
&= \left((2x^2 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right)'' \\
&= \left((4x + 2) \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot (2x^2 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right)' \\
&= \left((4x^2 + 8x + 2) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right)' \\
&= (8x + 8) \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot (4x^2 + 8x + 2) \cdot \mathrm{e}^{2x} \\
&= (8x^2 + 24x + 12) \cdot \mathrm{e}^{2x} .
\end{aligned}
$$

Aufgaben:

8. Gesucht ist jeweils $f'(2)$.

(Winkel sind in Bogenmaß, also Taschenrechner auf „rad“ oder „Rad“ einstellen!)

i) $f(x) = 3x^2 - 7x + 13$ **ii)** $f(x) = x^2 \cdot \left(x^3 - 5\right)$

iii) $f(x) = (x^3 - 5)^4$ **iv)** $f(x) = 2 \cdot \sin(3x)$

v) $f(x) = x \cdot \cos(2x)$ **vi)** $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{3x}$

vii) $f(x) = (x^2 - 3x + 1) \cdot e^{-x}$ **viii)** $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

ix) $f(x) = \ln(2x + 1)$ **x)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x - 4}$

xi) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$ **xii)** $f(x) = 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 4}$

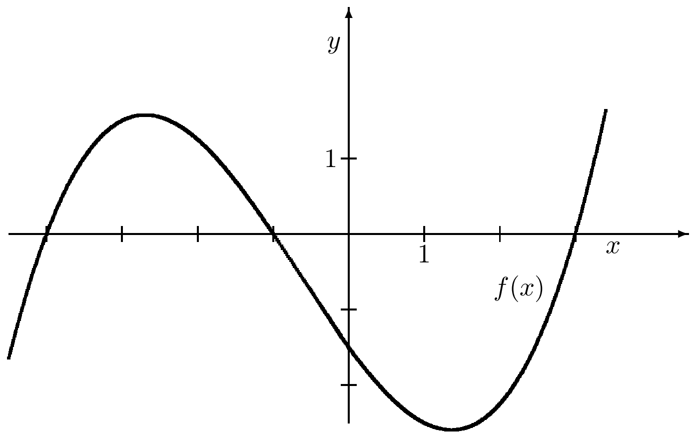
9. Gesucht ist jeweils $f''''(2)$.

(Vergessen Sie gegebenenfalls zwischendurch nicht das geeignete Zusammenfassen!)

i) $f(x) = 3x^7 - 4x^3 + 12x$ **ii)** $f(x) = (3x - 4)^6$

iii) $f(x) = (3x^2 - 5) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ **iv)** $f(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin(3x)$

10. Skizzieren Sie die Ableitung folgender Funktion:



4 Vektorrechnung

Vorbemerkungen:

- Es werden hier nur Vektoren in einer Ebene betrachtet und als Koordinatensystem wird nur das (übliche) kartesische x, y–Koordinatensystem verwendet.
- Vektoren werden üblicherweise mit halbfetten kleinen Buchstaben bezeichnet, z.B. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ oder $\boldsymbol{r}$. Die zugehörigen kartesischen Komponenten sind a_x, a_y, b_x, b_y u.s.w. und werden zu Spaltenvektoren zusammengefaßt:

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r} := \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}.$$

  (In dieser Konvention sollte man keine Vektoren mit $\boldsymbol{x}$ oder $\boldsymbol{y}$ benennen!)
- Für Vektoren $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ ist die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl (Skalar) α komponentenweise definiert:

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} := \begin{pmatrix} r_x + s_x \\ r_y + s_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha\, \boldsymbol{r} := \begin{pmatrix} \alpha\, r_x \\ \alpha\, r_y \end{pmatrix}.$$

  Das Ergebnis ist jeweils wieder ein Vektor.
- Für die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl gelten die beiden Distributivgesetze:

$$\alpha\,(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \alpha\,\boldsymbol{r} + \alpha\,\boldsymbol{s} \quad \text{und} \quad (\alpha + \beta)\,\boldsymbol{r} = \alpha\,\boldsymbol{r} + \beta\,\boldsymbol{r}$$

- Weiter ist zwischen zwei Vektoren ein Punktprodukt (Skalarprodukt) definiert, dessen Ergebnis eine Zahl (Skalar) ist:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} := r_x\, s_x + r_y\, s_y\ .$$

  (In dieser Konvention wird für das Produkt zwischen zwei Zahlen oder zwischen Zahl und Vektor kein Punkt geschrieben!)
- Für das Punktprodukt (Skalarprodukt) gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{array}{rl} i) & (\alpha\,\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{s} = \alpha\,(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r} \cdot (\alpha\,\boldsymbol{s})\ . \\ ii) & \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{r}\ . \\ iii) & (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{s}\ , \quad \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}_2\ . \\ iv) & \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \geq 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = 0 \ \text{ nur für } \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}\ . \end{array}$$

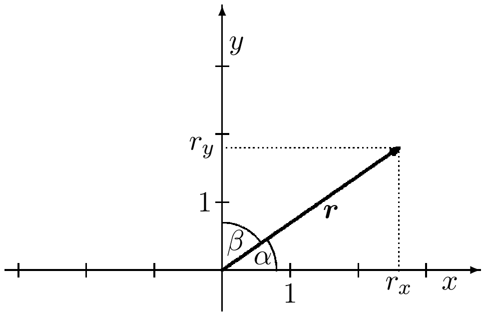
- Für Vektoren ist die Länge definiert:

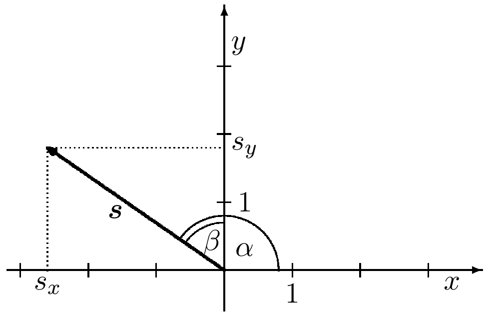
$$r := |\boldsymbol{r}| := \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}\ .$$

  Einen Vektor, der die Länge „1“ hat, nennt man normiert oder Einheitsvektor.
- Mit Hilfe des Punktproduktes kann man den „Winkel“ φ zwischen zwei Vektoren berechnen: Aus

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{r}|\ |\boldsymbol{s}| \cos(\varphi) \quad \text{folgt} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}|\ |\boldsymbol{s}|}\right).$$

  Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht (orthogonal) aufeinander, wenn ihr Punktprodukt „0“ ergibt.

- 



  Geometrisch deutet man Vektoren als gerichtete Strecken (Pfeile). Sie sind eindeutig durch Länge (Betrag) und Richtung gekennzeichnet, die man u.a. durch die Winkel gegen die Koordinatenachsen angeben kann. Diese Winkel mißt man gegen die Koordinateneinheitsvektoren $\mathbf{e}_x$ bzw. $\mathbf{e}_y$. Z.B. sei

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 1.8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{r}| = \sqrt{2.6^2 + 1.8^2} = 3.162 \;,$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \mathbf{e}_x}{|\boldsymbol{r}|\;1}\right) = \arccos\left(\frac{2.6}{3.162}\right) = 34.7^{\mathrm{o}} \;,$$

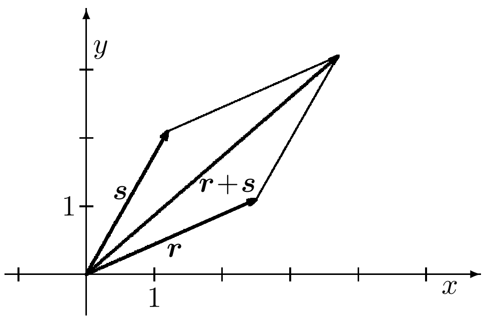
$$\beta = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \mathbf{e}_y}{|\boldsymbol{r}|\;1}\right) = \arccos\left(\frac{1.8}{3.162}\right) = 55.3^{\mathrm{o}} \;,$$

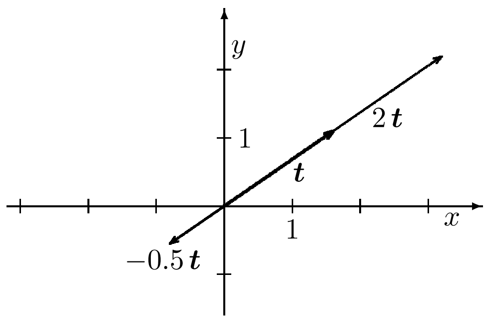
  und

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ 1.8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{s}| = \sqrt{(-2.6)^2 + 1.8^2} = 3.162 \;,$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{s} \cdot \mathbf{e}_x}{|\boldsymbol{s}|\;1}\right) = \arccos\left(\frac{-2.6}{3.162}\right) = 145.3^{\mathrm{o}} \;,$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{s} \cdot \mathbf{e}_y}{|\boldsymbol{s}|\;1}\right) = \arccos\left(\frac{1.8}{3.162}\right) = 55.3^{\mathrm{o}} \;.$$

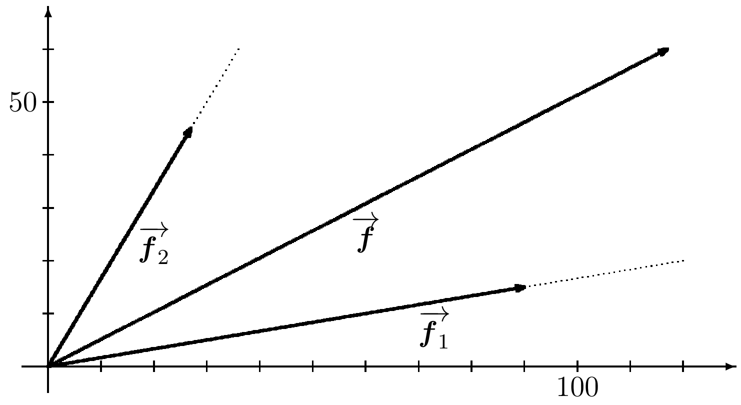
- 



  Die Addition zweier Vektoren erfolgt nach der Parallelogrammregel. Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl verlängert den Vektor um den Betrag des Faktors und kehrt ihn zusätzlich um, falls der Faktor negativ ist.

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 3.2 \end{pmatrix} \;, \qquad 2\,\boldsymbol{t} = 2\begin{pmatrix} 1.6 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 2.2 \end{pmatrix} \;.$$

•



Kräfte die an einem Punkt angreifen, verhalten sich wie Vektoren. Sie können also addiert und insbesondere in Komponenten mit vorgegebenen Richtungen zerlegt werden. Z.B. soll eine Kraft $\overrightarrow{f}$ in zwei Kräfte $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2$ mit den vorgegeben Richtungen $\boldsymbol{r}_1$ bzw. $\boldsymbol{r}_2$ zerlegt werden. Gegeben seien

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 117 \\ 60 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Aus dem Ansatz $\overrightarrow{f} = c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 \boldsymbol{r}_2$ erhält man für die beiden unbekannten Konstanten c_1, c_2 die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcr} 117\ [\mathrm{N}] & = & 6\,c_1 & + & 3\,c_2 \\ 60\ [\mathrm{N}] & = & 1\,c_1 & + & 5\,c_2 \end{array}$$

mit der Lösung $c_1 = 15$ [N] , $c_2 = 9$ [N] . Damit sind die gesuchten Kräfte

$$\overrightarrow{f}_1 = c_1 \boldsymbol{r}_1 = 15\ [\mathrm{N}] \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 15 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] \quad , \quad \overrightarrow{f}_2 = 9\ [\mathrm{N}] \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 45 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] .$$

• Wenn ein mechanisches System in Ruhe ist und damit keine Bewegung und erst recht keine Beschleunigung vorliegt, muß nach den Newton'schen Grundgesetz in jedem Punkt die Summe aller Kräfte „0“ sein.

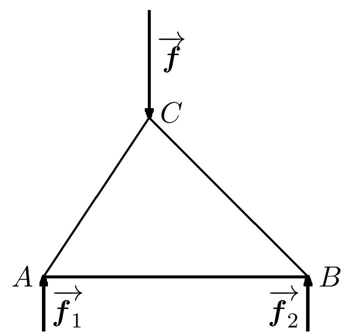
Als Beispiel sei ein einfaches Stabwerk betrachtet. Die Koordinaten der Eckpunkte seien:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Am Punkt C greife senkrecht von oben eine Kraft von $\boldsymbol{f} = 60$ [N] an.

Wie groß sind die beiden Lagerkräfte und die Kräfte in den Stäben?

Der Einfachheit halber soll das Eigengewicht des Stabwerks vernachlässigt werden und an den Eckpunkten sollen keine Drehmomente übertragen werden.



Um die Kräfte zu berechnen, betrachtet man die drei Eckpunkte. Dort muß jeweils die Summe der Kräfte Null sein.

Die Richtungsvektoren in den Stäben sind

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Wenn man die Kräfte in den Eckpunkten so ansetzt, daß die Richtungsvektoren vom Eckpunkt wegzeigen, so bezeichnen positive Konstanten Zugkräfte und negative Druckkräfte.

Am Punkt C gilt:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f}} + c_{AC}\,\overrightarrow{CA} + c_{BC}\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] + c_{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + c_{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung ist $c_{AC} = -12$ [N] , $c_{BC} = -8$ [N] , d.h. beide Stäbe werden auf Druck beansprucht. Die Beträge der beiden Kräfte sind:

$$f_{AC} = \left| -12 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| [\mathrm{N}] = 43.26 \ [\mathrm{N}] , \quad f_{BC} = \left| -8 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| [\mathrm{N}] = 33.94 \ [\mathrm{N}] .$$

Am Punkt A gilt:

$$c_{AC}\,\overrightarrow{AC} + c_{AB}\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\boldsymbol{f}_1} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad -12 \ [\mathrm{N}] \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung ist $f_1 = 36$ [N] , $c_{AB} = 4.8$ [N] , d.h. der Stab AB wird auf Zug beansprucht; er könnte also durch ein Seil ersetzt werden. Der Betrag der Kraft im Stab ist

$$f_{AB} = \left| 4.8 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 24 \ [\mathrm{N}] .$$

- Die noch fehlende zweite Lagerkraft $\overrightarrow{\boldsymbol{f}_2}$ kann man entweder aus einer Betrachtung des Punktes B berechnen oder einfacher aus der Überlegung, daß die Summe der äußeren Kräfte Null ergeben muß:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{f}} + \overrightarrow{\boldsymbol{f}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{f}_2} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{f}_2} = -\overrightarrow{\boldsymbol{f}} - \overrightarrow{\boldsymbol{f}_1} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -60 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] - \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] .$$

Aufgaben:

11. Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \; .$$

Berechnen Sie folgende Größen, wobei mit $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren bezeichnet wird:

i)	$\boldsymbol{a} + 2\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$	**ii)**	$(3\,\boldsymbol{a} - 4\,\boldsymbol{b}) - 2\,(\boldsymbol{c} - 2\,\boldsymbol{b})$
iii)	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	**iv)**	$2\,\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$
v)	$\lvert 3\,\boldsymbol{a} \rvert$	**vi)**	$\lvert 2\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \rvert$
vii)	$\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	**viii)**	$\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

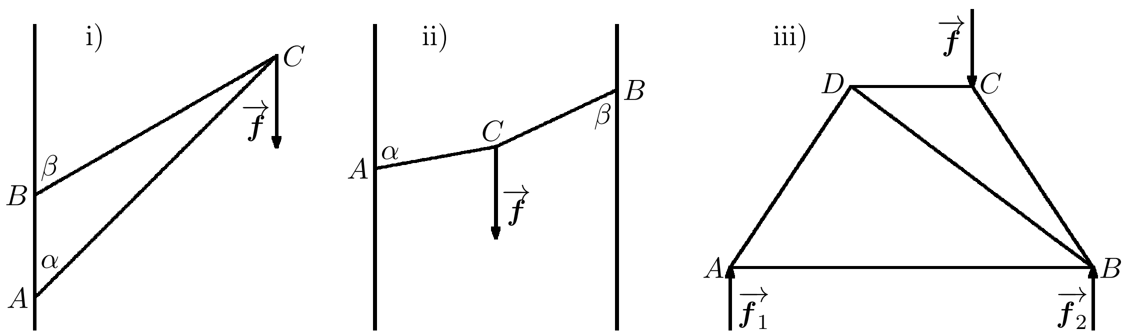
Geben Sie jeweils die beiden Vektoren an, die senkrecht auf den folgenden Vektoren stehen und die gleiche Länge wie diese haben:

ix) $\boldsymbol{a}$ **x)** $(3\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

Berechnen Sie $\boldsymbol{r}$ aus folgenden Gleichungen:

xi) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ **xii)** $2\,(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}) = 2\,\boldsymbol{c} - 3\,\boldsymbol{r}$

12.



Berechnen Sie jeweils (analog zum obigen Beispiel) die Beträge der Kräfte in den Stäben und falls eingezeichnet, die Lagerkräfte. Bei den Stabkräften geben Sie bitte jeweils auch an, ob es sich um Druck– oder Zugkräfte handelt.

Gegebene Daten:

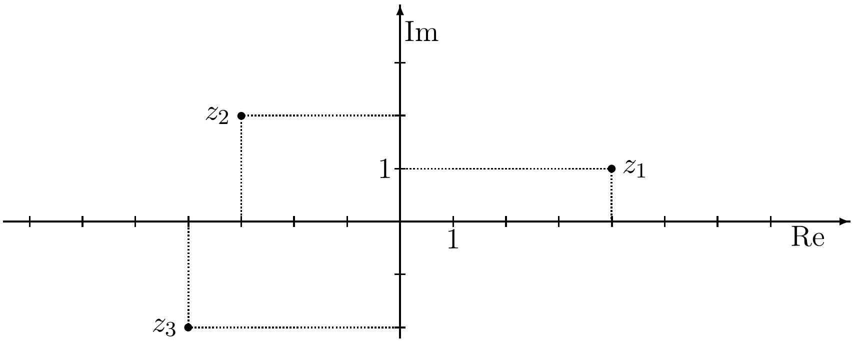
i) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $f = 1000$ [N] .

ii) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 65^\circ$, $f = 200$ [N] .

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f = 900$ [N] .

5 Komplexe Zahlen

Vorbemerkungen:

- 

Die komplexen — d.h. zusammengesetzten — Zahlen erhält man, wenn man zu den (normalen) reellen Zahlen noch eine neue Zahl „i " („imaginäre Einheit") hinzunimmt, die die Eigenschaft

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1} \tag{1}$$

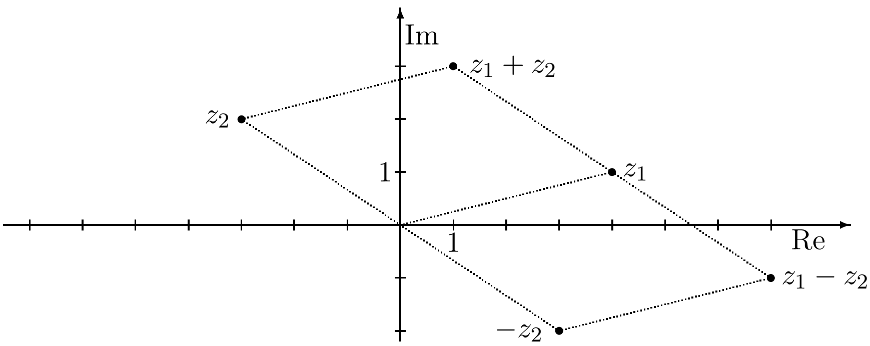
hat, sonst aber alle Rechenregeln für die Grundrechenarten beibehält. Eine komplexe Zahl z setzt sich additiv aus zwei Komponenten zusammen

$$z = x + y\,\mathrm{i}\ , \quad x, y \in \mathbb{R}\ ,$$

wobei die Komponenten x und y reelle Zahlen sind. Man nennt x den „Realteil" und y den „Imaginärteil" der komplexen Zahl z .

Während die reellen Zahlen „eindimensionale Zahlen" sind, denn sie lassen sich auf dem „Zahlenstrahl" veranschaulichen, sind die komplexen Zahlen „zweidimensionale Zahlen", die sich sehr gut in der „komplexen Zahlenebene" veranschaulichen lassen. In der Skizze sind folgende drei komplexe Zahlen eingezeichnet:

$$z_1 = 4 + 1\,\mathrm{i}\ , \quad z_2 = -3 + 2\,\mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_3 = -4 - 2\,\mathrm{i}\ .$$

- 

Bezüglich der Addition und Subtraktion verhalten sich komplexe Zahlen wie zweidimensionale Vektoren:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4 + 1\,\mathrm{i}) + (-3 + 2\,\mathrm{i}) &= 1 + 3\,\mathrm{i}\ , \\ z_1 - z_2 &= (4 + 1\,\mathrm{i}) - (-3 + 2\,\mathrm{i}) &= 7 - \mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

- Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen folgt unmittelbar aus den bekannten Rechenregeln, wenn man $\mathrm{i}^2 = -1$ beachtet:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (4 + 1\,\mathrm{i}) \cdot (-3 + 2\,\mathrm{i}) \\ &= -12 + 8\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i}^2 = -14 + 5\,\mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

- Das Quadrat einer komplexen Zahl ist i.a. keine reelle Zahl, wie man an folgendem Beispiel sieht:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= (4 + 1\,\mathrm{i}) \cdot (4 + 1\,\mathrm{i}) \\ &= 16 + 4\,\mathrm{i} + 4\,\mathrm{i} + 1\,\mathrm{i}^2 = 15 + 8\,\mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

- Für die Division benötigt man die „konjugiert komplexe“ Zahl $\bar{z}$ einer komplexen Zahl z . Sie entsteht dadurch, daß man beim Imaginärteil das Vorzeichen wechselt:

$$z = x + y\,\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = x - y\,\mathrm{i}\ .$$

  Dies ist geometrisch gedeutet eine Spiegelung an der reellen Achse.

  Selbstverständlich gilt $\overline{(\bar{z})} = z$.

- Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen ist immer reell. z.B.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \bar{z}_1 &= (4 + 1\,\mathrm{i}) \cdot (4 - 1\,\mathrm{i}) \\ &= 16 - 4\,\mathrm{i} + 4\,\mathrm{i} - 1\,\mathrm{i}^2 = 17\ . \end{aligned}$$

- Der „Betrag“ einer komplexen Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ ist durch

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  definiert, d.h. es ist gerade die „geometrische Länge“ der Zahl z .

- Um die Division zweier komplexer Zahlen durchzuführen, erweitert man den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners. Dadurch wird der Nenner reell und mit der schon bekannten Multiplikation ist der Rest sehr einfach:

$$\begin{aligned} \frac{-5 + 2\,\mathrm{i}}{4 + 3\,\mathrm{i}} &= \frac{(-5 + 2\,\mathrm{i}) \cdot (4 - 3\,\mathrm{i})}{(4 + 3\,\mathrm{i}) \cdot (4 - 3\,\mathrm{i})} \\ &= \frac{-20 + 15\,\mathrm{i} + 8\,\mathrm{i} - 6\,\mathrm{i}^2}{4^2 + 3^2} \\ &= \frac{-14 + 23\,\mathrm{i}}{25} = -0.56 + 0.92\,\mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

- Bei der Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen geht die Anordnung verloren, d.h. bei den komplexen Zahlen sind die Begriffe „größer“ und „kleiner“ sinnlos. (Ein Punkt teilt sehr wohl den (reellen) Zahlenstrahl in zwei Bereiche, nicht aber die (komplexe) Ebene.)

- Da es keine Anordnung gibt, kann man in den komplexen Zahlen auch keine sinnvolle „Wurzelfunktion“ definieren. Deshalb muß man die beiden Lösung der komplexen Gleichung

$$z^2 = (a + b\,\mathrm{i}\,)\ , \quad b \neq 0\ ,$$

  anders berechnen:

  Mit dem Ansatz $z = x + y\,\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$, gilt

$$z^2 = (x + y\,\mathrm{i})^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2\,xy\,\mathrm{i} = a + b\,\mathrm{i}\ .$$

Der Koeffizientenvergleich von Real– und Imaginärteil ergibt die beiden reellen Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \ , \\ 2\,xy &= b \ . \end{aligned}$$

Löst man die zweite Gleichung nach y auf

$$y = \frac{b}{2\,x} \qquad (*)$$

und setzen sie in die erste ein, so erhält man:

$$x^2 - \frac{b^2}{4\,x^2} = a \qquad \Rightarrow \qquad x^4 - a\,x^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \ .$$

Die biquadratische Gleichung hat die beiden reellen Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ .$$

Die zugehörigen y–Werte erhält man aus $(*)$, denn wenn der Imaginärteil $b \neq 0$ ist, dann ist sicher auch $x \neq 0$.

Lösung von $\quad z^2 = (a + \mathrm{i}\,b) \quad$ mit $\quad b \neq 0$:

$$\boxed{z_{1,2} = \pm\left(w + \frac{b}{2\,w}\cdot \mathrm{i}\right) \quad \text{mit} \quad w = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ .} \tag{2}$$

Zahlenbeispiel: $\quad z^2 = 5 - 12\,\mathrm{i}$:

$$\Rightarrow \qquad w = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2+12^2}}{2}} = 3 \qquad \text{und} \qquad z_{1,2} = \pm\left(3 + \mathrm{i}\cdot\frac{-12}{2\cdot 3}\right) = \pm\,(3 - 2\,\mathrm{i}) \ .$$

- Die (normierte) quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten

  $$z^2 + (6 - 2\,\mathrm{i})\,z + (13 - 18\,\mathrm{i}) = 0$$

  löst man wie folgt:

  Zunächst die quadratische Ergänzung:

  $$\begin{aligned} \big(z + (3 - \mathrm{i})\big)^2 &= -(13 - 18\,\mathrm{i}) + (3 - \mathrm{i})^2 \\ &= -5 + 12\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

  Nun verwandelt man mit Hilfe von Formel (2) den Term „ $-5 + 12\,\mathrm{i}$ “ in ein Quadrat. Damit erhält man

  $$\big(z + (3 - \mathrm{i})\big)^2 = (2 + 3\,\mathrm{i})^2$$

  und weiter

  $$z + (3 - \mathrm{i}) = \pm(2 + 3\,\mathrm{i}) \ .$$

  Die beiden gesuchten Lösungen der quadratischen Gleichung sind also

  $$z_1 = (2 + 3\,\mathrm{i}) - (3 - \mathrm{i}) = (-1 + 4\,\mathrm{i}) \qquad \text{und} \qquad z_2 = -(2 + 3\,\mathrm{i}) - (3 - \mathrm{i}) = (-5 - 2\,\mathrm{i}) \ .$$

Aufgaben:

13. Gegeben seien die drei komplexen Zahlen

$$z_1 = 3 + 2\,\mathrm{i}\,, \quad z_2 = -2 + \mathrm{i}\,, \quad z_3 = 4 - 3\,\mathrm{i}\,.$$

i) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Zahlen

$$z_1\,, \quad -z_1\,, \quad \bar{z}_1\,, \quad -\bar{z}_1\,.$$

ii) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Zahlen

$$z_1\,, \quad z_2\,, \quad z_1 + z_2\,, \quad z_1 - z_2\,.$$

Berechnen Sie folgende Terme

iii)	$z_1 - z_2 + z_3$	**iv)**	$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
v)	$(z_1 - z_3)^2$	**vi)**	$(z_1 - z_3) \cdot \overline{(z_1 - z_3)}$
vii)	$\dfrac{3\,z_1}{z_3}$	**viii)**	$\dfrac{{z_1}^2 \cdot z_2}{-z_3}$
ix)	$\lvert z_3 \rvert$	**x)**	$\lvert z_1 \cdot z_2 + 2\,z_3 \rvert$

14. Bestimmen Sie alle (reellen oder komplexen) Lösungen folgender Gleichungen:

i)	$z^2 = 16$	**ii)**	$z^2 = -16$
iii)	$z^2 = 8\,\mathrm{i}$	**iv)**	$z^2 = -8\,\mathrm{i}$
v)	$z^2 + 6\,z - 16$	**vi)**	$z^2 + 6\,z + 13$
vii)	$z^2 = -16 + 30\,\mathrm{i}$	**viii)**	$z^2 = -16 - 30\,\mathrm{i}$
ix)	$z^2 + (-2 + 6\,\mathrm{i})\,z + (-8 + 2\,\mathrm{i}) = 0$	**x)**	$z^2 + (-3 + 6\,\mathrm{i})\,z - (12 + 14\,\mathrm{i}) = 0$
xi)	$z^4 - 21\,z^2 - 100 = 0$	**xii)**	$z^4 + 16z^2 + 100 = 0$

6 Summen

Vorbemerkungen:

- Um Summen gleichartiger Terme leichter und übersichtlicher schreiben zu können, führt man das **Summenzeichen** „ $\sum$ “ ein:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n & \text{für} \quad n \geq m \\ 0 & \text{für} \quad n < m \end{cases} \quad , \quad m, n \in \mathbb{Z} \ .$$

Die Terme a_k , über die summiert wird, hängen im allgemeinen von der Laufvariablen k ab, die alle ganzen Zahlen zwischen m und n (einschließlich der Grenzen selbst) durchläuft. Ist $n < m$, d.h. die obere Summationsgrenze kleiner als die untere, so ist die Summe „leer“ und hat definitionsgemäß den Wert Null. Z.B. ist

$$\sum_{i=3}^{5} (2\,i + 1)^2 = (2 \cdot 3 + 1)^2 + (2 \cdot 4 + 1)^2 + (2 \cdot 5 + 1)^2 = 7^2 + 9^2 + 11^2 = 251 \quad ,$$

$$\sum_{j=0}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \quad \text{und} \quad \sum_{k=3}^{2} k^5 = 0 \quad \text{da} \quad 3 > 2 \quad \text{ist.}$$

- Obwohl das Summenzeichen ursprünglich nur als Abkürzung eingeführt wurde, bildet es einen Kalkül, mit dem man rechnen kann. Die **Rechenregeln für Summen** sind:

i) Der Name der Laufvariablen hat keine Bedeutung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j \ .$$

ii) Linearität der Summation:

$$\sum_{k=m}^{n} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k) = \alpha \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

iii) Aufspalten einer Summe in Teilsummen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k \quad , \quad m \leq p < n \ .$$

iv) Substitution der Laufvariablen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r} \ .$$

Die vier Rechenregeln kann man sich an Beispielen sehr leicht verdeutlichen:

zu i) Wenn man die Summe ausschreibt, so kommt der Name des Laufvariablen nicht mehr vor:

$$\sum_{k=3}^{6} (k-2) = (3-2)^2 + (4-2)^2 + (5-2)^2 + (6-2)^2 \ .$$

zu ii) Diese Regel folgt unmittelbar aus den elementaren Rechenregeln für Zahlen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{6}\left(7\cdot k^2+3\cdot k\right) &= \left(7\cdot 4^2+3\cdot 4\right)+\left(7\cdot 5^2+3\cdot 5\right)+\left(7\cdot 6^2+3\cdot 6\right)\\ &= 7\cdot\left(4^2+5^2+6^2\right)+3\cdot(4+5+6)\\ &= 7\cdot\sum_{k=4}^{6}k^2+3\cdot\sum_{k=4}^{6}k\,.\end{aligned}$$

zu iii) Auch diese Regel folgt unmittelbar aus den elementaren Rechenregeln für Zahlen:

$$\sum_{k=2}^{6}k^2=2^2+3^2+4^2+5^2+5^2=\left(2^2+3^2\right)+\left(4^2+5^2+5^2\right)=\sum_{k=2}^{3}k^2+\sum_{k=4}^{6}k^2\ .$$

zu iv) Bei der Substitution werden die einzelnen Summanden nicht verändert, sondern nur formal anders geschrieben:

$$\sum_{k=3}^{5}(k+4)^2 = (3+4)^2+(4+4)^2+(5+4)^2 = 7^2+8^2+9^2\ .$$

$$\sum_{k=3+2}^{5+2}(k-2+4)^2 = \sum_{k=5}^{7}(k+2)^2 = (5+2)^2+(6+2)^2+(7+2)^2 = 7^2+8^2+9^2\ .$$

- Einige **Summenformeln:**

i) arithmetische Summen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}1 &= \underbrace{1+1+1+...+1}_{n\text{ Summanden}} = n\ ,\\ \sum_{k=1}^{n}k &= 1+2+3+...+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\ ,\\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 1+3+5+...+(2n-1) = n^2\ ,\\ \sum_{k=1}^{n}k^2 &= 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\ ,\\ \sum_{k=1}^{n}k^3 &= 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\ .\end{aligned}$$

ii) die geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k = 1+q+q^2+q^3+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ ,\ \ q\neq 1\ .$$

Man beachte, da? die arithmetischen Summenformeln bei 1 beginnen und die geometrische Summenformel bei 0 beginnt. Die Summenformeln gelten für alle $n\in\mathbb{N}$, also auch für $n=0$.

- Um „kurze“ Summen zu berechnen, genügt oft die Definition: man berechnet jeden Summanden explizit und addiert sie. Bei „langen“ Summen ist es häufig effektiver, sie mit Hilfe der Rechenregeln so umzuformen, daß man die Summenformeln benutzen kann. In Formelsammlungen sind weitere Summenformeln zu finden. Einige Beispiele:

  i) Anpassung der Grenzen, um die Summenformel benutzen zu können, die als untere Grenze die 1 verlangt:

$$\sum_{k=11}^{50} k^2 = \sum_{k=1}^{50} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 42\,540 \ .$$

  ii) Zerlegen in Teilsummen:

$$\sum_{k=1}^{20} (5k-3) = 5\sum_{k=1}^{20} k - 3\sum_{k=1}^{20} 1 = 5\,\frac{20 \cdot 21}{2} - 3 \cdot 20 = 990 \ .$$

  iii) Substituieren, um den Summanden zu vereinfachen::

$$\sum_{k=0}^{15} (k+5)^3 = \sum_{k=5}^{20} k^3 = \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{4} k^3 = \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} - \frac{4^2 \cdot 5^2}{4} = 44\,000 \ .$$

  iv) Unter eine Summe ziehen und dann den Summanden zusammenfassen (dies geht selbstverständlich nur, wenn die Grenzen übereinstimmen):

$$\sum_{k=1}^{40} k^2 - \sum_{j=1}^{40} (j^2-1) = \sum_{n=1}^{40} \big(n^2 - (n^2-1)\big) = \sum_{n=1}^{40} 1 = 40 \ .$$

  v) Um die Summen zu einer Summe zusammenfassen zu können, wird aus der ersten Summe der letzte Summand herausgenommen und die zweite Summe substituiert:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{21} (k+5) + \sum_{k=3}^{22} (4-k) &= (21+5) + \sum_{k=1}^{20} (k+5) + \sum_{k=1}^{20} \Big(4 - (k+2)\Big) \\ &= 26 + \sum_{k=1}^{20} \Big((k+5) + (2-k) \Big) \\ &= 26 + \sum_{k=1}^{20} 7 = 26 + 7 \cdot 20 = 166 \ .\end{aligned}$$

- Bei **Doppelsummen** läuft der innere Index „schneller“als der äußere.

$$\sum_i \sum_k a_{i,k} := \sum_i \left(\sum_k a_{i,k} \right) \ .$$

  Auch können die Grenzen der **inneren** Summe von der Laufvariablen der **äußeren** abhängen:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{i} i \cdot k^2 = \underbrace{1 \cdot 1^2}_{i=1} + \underbrace{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2}_{i=2} + \underbrace{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2}_{i=3} = 53 \ .$$

Nur wenn die Grenzen von **beiden** Summen fest sind, kann man die Reihenfolge der Summationen vertauschen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=5}^{6} a_{i,k}\right) &= \underbrace{a_{1,5}+a_{1,6}}_{i=1} + \underbrace{a_{2,5}+a_{2,6}}_{i=2} + \underbrace{a_{3,5}+a_{3,6}}_{i=3} \\ &= \underbrace{a_{1,5}+a_{2,5}+a_{3,5}}_{k=5} + \underbrace{a_{1,6}+a_{2,6}+a_{3,6}}_{k=6} = \sum_{k=5}^{6}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,k}\right) \ .\end{aligned}$$

Beispiel einer Doppelsumme mit festen Grenzen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=5}^{10}\sum_{k=1}^{6}(2\,i\,k-3) &= \sum_{i=5}^{10}\left(2\,i\cdot\frac{6\cdot 7}{2} - 3\cdot 6\right) \\ &= \sum_{i=5}^{10}(42\,i-18) \\ &= 42\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2}-\frac{4\cdot 5}{2}\right) - 18\cdot(10-4) = 1782 \ .\end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich, daß die Vertauschung der Reihenfolge zum gleichen Ergebnis führt:

$$\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=5}^{10}(2\,i\,k-3) = \ldots = 1782 \ .$$

Beispiel mit variablen inneren Grenzen (hier darf man die Reihenfolge **nicht** vertauschen):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=i}^{2\,i} 4ik &= \sum_{i=1}^{5}\left(4i\sum_{k=i}^{2\,i} k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{5} 4i\left(\frac{2i\ (2i+1)}{2} - \frac{(i-1)\ i}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{5} 6\ \left(i^3+i^2\right) \\ &= 6\cdot\left(\frac{5^2\cdot 6^2}{4}+\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}\right) = 1680 \ .\end{aligned}$$

Aufgaben:

15. Schreiben Sie als Summe:

i) $3+7+11+15+...+35 = \sum_{k=1}^{...} ...$ **ii)** $4-9+16-25+...+100 = \sum_{k=2}^{...} ...$

iii) $5+10+20+40+...+320 = \sum_{k=0}^{...} ...$ **iv)** $-4-1+2+5+...+20 = \sum_{k=1}^{...} ...$

16. Berechnen Sie die Summen:

i) $\sum_{k=1}^{20} (2k-5)$ **ii)** $\sum_{k=1}^{25} k \cdot (k-10)$

iii) $\sum_{k=0}^{12} 5 \cdot (1.2)^k$ **iv)** $\sum_{k=5}^{15} (k-4)^3$

v) $\sum_{k=6}^{20} (k-5)\,(k+5)$ **vi)** $\sum_{k=1}^{40} (-1)^k \cdot k^2$

vii) $\sum_{k=10}^{20} -10 \cdot (-0.9)^k$ **viii)** $\sum_{k=1}^{10} 5 \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^k + 2 \right)$

17. Erst zu einer Summe zusammenfassen und dann ausrechnen:

i) $\sum_{k=1}^{10} k(k-2) + \sum_{i=1}^{10} (i^2-4) - \sum_{j=1}^{10} (j+2)\,(j-2) = \sum_{n=1}^{...} ... = ...$

ii) $\sum_{k=2}^{11} k(k-2) - \sum_{i=0}^{9} \left((i+1)^2 + 3i\right) = \sum_{n=1}^{...} ... = ...$

18. Berechnen Sie die Doppelsummen:

i) $\sum_{i=1}^{10} \sum_{k=5}^{8} i^2\, k$ *ii)* $\sum_{i=5}^{10} \sum_{k=1}^{3\,i} \frac{2\,k^2 - 10}{i}$ *iii)* $\sum_{i=1}^{10} \sum_{k=i}^{10} (3ik-5)$ *iv)* $\sum_{i=2}^{6} \sum_{k=1}^{3\,i} (2\,k-1)$.

19. Bestimmen Sie die Summenformel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 \quad .$$

Hinweis: Es gilt der Satz: „Wenn der Summand ein Polynom m–ten Grades ist, so ist die Summenformel ein Polynom $(m+1)$–ten Grades.“ Sie können also den Ansatz

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \alpha\, n^3 + \beta\, n^2 + \gamma\, n + \delta \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \ ,$$

machen und die Koeffizienten aus den Gleichungen für $n = 0, 1, 2, 3$ bestimmen. (Rechenkontrolle bei $n = 4$ nicht vergessen!)

Ergebnisse der Aufgaben

1. $i)\ \frac{1}{10}\quad ii)\ \frac{4}{15}\quad iii)\ \frac{3}{125}\quad iv)\ \frac{64}{49}\quad v)\ \frac{8}{15}\quad vi)\ \frac{2a^2-ab+2b^2}{2a^2b^2}\quad vii)\ \frac{b}{b^2-a^2}\quad viii)\ \frac{a-6}{2a-3}$

   $ix)\ \frac{8ab^2}{(a^2-b^2)^2} = \frac{8ab^2}{(a+b)^2\,(a-b)^2}\quad x)\ 0\ .$

2. $i)\ -4\ ;\ 3\quad ii)\ -2\quad iii)\ -2\ ;\ \frac{7}{2}\quad iv)\ -\quad v)\ \frac{-3}{4}\ ;\ \frac{5}{4}\quad vi)\ \frac{-7}{3}\ ,\ 0\quad vii)\ \pm\frac{3}{2}\ ;\ \pm 2$

   $viii)\ -2\ ;\ 0\ ;\ 12\quad ix)\ \frac{7}{2}\quad x)\ 1\ ,\ 3\quad xi)\ \frac{-6}{5}\quad xii)\ (x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)\ ;\left(\frac{1}{2},\frac{15}{8}\right)$

   $xiii)\ (x,y)=(3,2)\quad xiv)\quad xiv)\ (x,y)=\left(\frac{5}{2},\frac{-3}{2}\right)\ .$

3. $i)\ a^{5/2}\quad ii)\ a^2\quad iii)\ a^{-8}\quad iv)\ -2\,a^{10}\,b^{-7}\quad v)\ a^{-3}\quad vi)\ 1\quad vii)\ 20\quad viii)\ 7\,x^3$

   $ix)\ 3x+5+\ln(2) = 3x+5.6931\quad x)\ 2\,x^2+4\ .$

4. $i)\ 5.3327\ \ ii)\ 4.3744\ \ iii)\ -\ \ iv)\ 2.3284\ ;\ 9.9817\ \ v)\ 4.1063\ ;\ 13.5329\ .$

5. $x = 2.300\ ,\ y = 3.699\ .$

6. $5.043\ .$

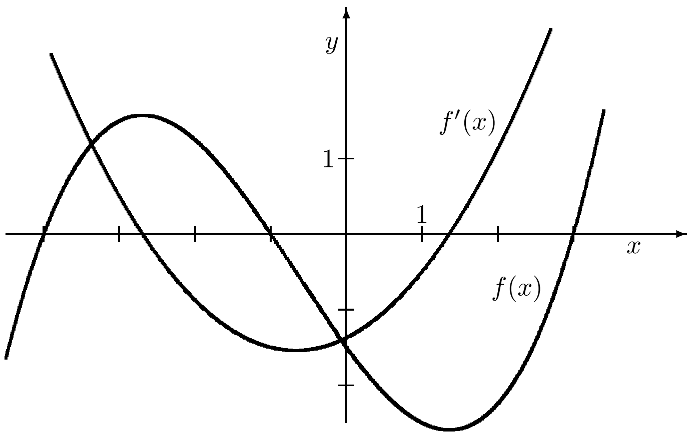
7. $h = 3.400\ .$

8. $i)\ 5\ ,\quad ii)\ 60\ ,\quad iii)\ 1296\ ,\quad iv)\ 5.761\ ,\quad v)\ 2.374\ ,\quad vi)\ 2420.57\ ,\quad vii)\ 0.2707\ ,$

   $viii)\ -0.1282\ ,\quad ix)\ 0.4\ ,\quad x)\ -1.25\ ,\quad xi)\ 0.2222\ ,\quad xii)\ 3\ .$

9. $i)\ 20\,160\ \ ii)\ 116\,640\ \ iii)\ -2.3444\ \ iv)\ -4475.41\ .$

10.



11. $i)\ \begin{pmatrix}12\\-1\end{pmatrix}\quad ii)\ \begin{pmatrix}19\\14\end{pmatrix}\quad iii)\ -6\quad iv)\ 26\quad v)\ 15\quad vi)\ 10.296\quad vii)\ 109.4^{\circ}\quad viii)\ 138.2^{\circ}\ ,$

    $ix)\ \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\quad x)\ \begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix}\quad xi)\ \begin{pmatrix}-8\\-5\end{pmatrix}\quad xii)\ \begin{pmatrix}-2.8\\0.8\end{pmatrix}\ .$

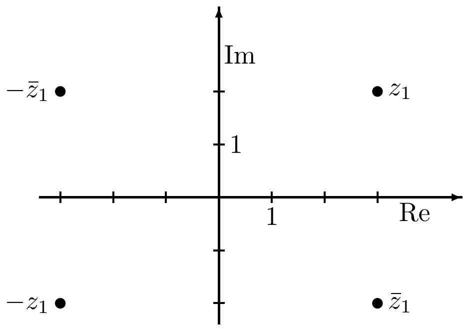
12. $i)\ f_{AC} = 3346$ [N] (Druck) ; $f_{BC} = 2732$ [N] (Zug) ,

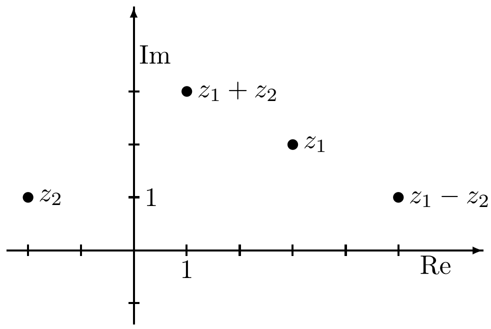
    $ii)\ f_{AC} = 700.3$ [N] (Zug) ; $f_{BC} = 761.0$ [N] (Zug) ,

    $iii)\ f_{AB} = 200$ [N] (Zug) ; $f_{AD} = 360.6$ [N] (Druck) ; $f_{BC} = 1082$ [N] (Druck) ;

    $f_{BD} = 500$ [N] (Zug) ; $f_{CD} = 600$ [N] (Druck) ; $f_1 = 300$ [N] ; $f_2 = 600$ [N] .

13.





iii) $9-2\,\mathrm{i}$ *iv)* $-35+20\,\mathrm{i}$ *v)* $-24-10\,\mathrm{i}$ *vi)* 26 *vii)* $0.72+2.04\,\mathrm{i}$ *viii)* $1.24+5.68\,\mathrm{i}$,
ix) 5 *x)* 7 .

14. *i)* ± 4 *ii)* $\pm 4\,\mathrm{i}$ *iii)* $\pm(2+2\mathrm{i})$ *iv)* $\pm(2-2\mathrm{i})$ *v)* $-8;\ 2$ *vi)* $-3\pm 2\,\mathrm{i}$ *vii)* $\pm(3+5\,\mathrm{i})$,
viii) $\pm(3-5\,\mathrm{i})$ *ix)* $-1-\mathrm{i}\,;\ 3-5\,\mathrm{i}$ *x)* $-1-4\,\mathrm{i}\,;\ 4-2\,\mathrm{i}$ *xi)* $\pm 5\,;\ \pm 2\,\mathrm{i}$ *xii)* $\pm 1 \pm 3\,\mathrm{i}$.

15. *i)* $\sum_{k=1}^{9}(4k-1)$ *ii)* $\sum_{k=2}^{10}(-1)^k\cdot k^2$ *iii)* $\sum_{k=0}^{6} 5\cdot 2^k$ *iv)* $\sum_{k=1}^{9}(3k-7)$.

16. *i)* 320 *ii)* 2275 *iii)* 242.483 *iv)* 4356 *v)* 2440 *vi)* 820 *vii)* -2.4110 *viii)* 255.752 .

17. *i)* 275 *ii)* -145 .

18. *i)* 10 010 *ii)* 6621 *iii)* 4840 *iv)* 810 .

19. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = -\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3 = \frac{n\cdot\left(n^2-1\right)}{3}$.